

din gîndirea matematică românească

solomon marcus



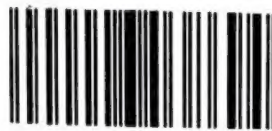
dan barbilian
pius şerban coculescu
alexandru froda
matila c. ghyka
spiru haret
gheorghe mihoc
grigore c. moisi
miron nicolescu
octav onicescu
dimitrie pompeiu
simion stoilow
gabriel sudan
florin vasilescu

51/14981
4335

solomon marcus



din gîndirea matematică românească



603869

B.C.U. IASI

hb.761

Editura științifică și enciclopedică
București, 1975

PREFAȚĂ

Autorul lucrării *Din gândirea matematică românească* este un matematician de deosebit prestigiu, cunoscut tuturor specialiștilor din centrele științifice de la noi și din afară, dublat de un lingvist situat la frontiera dintre matematică și lingvistică. În domeniul lingvisticii matematice, el a făcut operă de pionierat, care îl situează printre fondatorii acestei discipline.

Spirit critic, înzestrat cu o mare putere de analiză, dar și de sinteză, profesorul S. Marcus a fost condus în mod natural la întocmirea lucrării de mai sus, care constituie o adevărată operă de cercetare. Iar cunoștințele sale vaste aveau să constituie garanția unei depline reușite.

Titlul însuși al lucrării *Din gândirea matematică românească* indică de la început o limitare impusă de autor cadrului studiului său. Din curgerea continuă a fluxului cercetării matematice românești, autorul a selectat acele momente care l-au impresionat cel mai mult — și acele figuri de savanți ale căror opere, sau al căror învățămînt, au contribuit în cea mai mare măsură la desăvîrșirea propriei sale personalități.

Autorul nu a dorit și nici nu a încercat să facă o prezentare a vieții și operei oamenilor de știință pe care îi întâlnim în lucrare. Cititorul nu va găsi aici anul nașterii lui Stoilow, nici anul morții lui Barbillian, nici amănunte privind studiile universitare ale lui Moisil. El va afla din paginile acestei lucrări ceva mai puțin și în același timp mult mai mult decît se poate găsi într-o istorie — uniformizantă prin forța lucrurilor. El va descoperi acele idei din operele lui Stoilow, Pompeiu, Vasilescu etc. care au contribuit la creșterea patrimoniului științei universale și în același timp la afirmarea prestigioasă a cercetării matematice românești.

Am avut privilegiul să cunosc impulsul inițial al lucrării de față. Autorul și-a notat, de-a lungul anilor, acele idei fertile din operele oamenilor de știință studiați, care au fost uitate sau care au fost ignorate și apoi puse în circulație sub alte semnături. Cu o rîvnă demnă de admirat, prof. S. Marcus restabilește prioritatea unor cercetări făcute de Pompeiu, de Stoilow, de Froda, de Sudan, de Moisil.

Printre lucrările uitate, autorul amintește de *Mecanica socială* a lui Haret, în care, sub învelișul formal al analogiilor matematice, prof. Mircea Malița a descoperit recent originea unor noțiuni astăzi foarte importante în disciplinele de frontieră dintre matematică și științele sociale.

La lista autorilor pomeniți, autorul adaugă doi savanți aproape complet ignorați la noi, care — deși de obîrșie românească — și-au desfășurat în întregime activitatea lor științifică în afara frontierelor țării și și-au scris toată opera lor în limba franceză. Este vorba de Pius Șerban Coculescu (cunoscut publicului sub numele de Pius Servien) și de Matila Ghyka. Opera lor se bucură astăzi în lumea științifică internațională de o apreciere sensibil superioară aceleia de care s-a bucurat în momentul în care

a fost scrisă (cu peste patru decenii în urmă). Ambii autori au fost niște precursori în discipline care s-au încheiat abia în ultimii ani și de aceea reamintirea meritelor lor deosebite constituie un act de justiție în fața istoriei. Iar încorporarea lor în galeria oamenilor de cultură și de știință români (așa cum s-a procedat anterior cu Gogu Constantinescu, Henri Coandă sau George S. Palade) este un act de restituire pentru care trebuie să fim recunoscători autorului.

Lectura lucrării lui S. Marcus a constituit pentru mine o înaltă desfășurare, grație stilului său cald, direct, simplu, stil de adevărat povestitor, care știe să conducă cititorul chiar pe drumurile mai dificile ale unor dezvoltări cu caracter tehnic, atunci când astfel de drumuri apar. Nu este nevoie să fii specialist și nici măcar matematician în sensul larg al cuvântului pentru a înțelege importanța pentru matematici și mai ales fertilitatea multora dintre ideile generos răspindite în paginile lucrărilor savanților amintiți. După cum nu este nevoie de o argumentație suplimentară pentru ca cititorul care va ajunge la capătul lecturii unei astfel de cărți să înțeleagă marea importanță a ei pentru tinerii epocii noastre, dar mai ales pentru învățații de mîine ai patriei noastre, care vor fi curioși să pătrundă cît de cît în tainele creației înaintașilor, altfel decît prin lectura unui articol din dicționar.

Prin cartea sa, prima de acest gen scrisă în țara noastră, prof. S. Marcus aduce un insign serviciu științei și culturii românești*.

MIRON NICOLESCU

26 mai 1975

* Textul de față a fost scris de către profesorul Miron Nicolescu — ca referat solicitat de editură — cu o lună înaintea morții sale, survenite la 30 iunie 1975. Autorul, de comun acord cu editura, a hotărît să-l publice sub formă de prefață.

DIN ISTORIA UNOR FRUSTRĂRI

Cartea de față este alcătuită din două părți. În prima parte ne ocupăm mai întâi de evoluția preocupărilor românești de teoria funcțiilor reale, distingînd, în cadrul ei, cinci etape de dezvoltare; lui Dimitrie Pompeiu, reprezentantul unic al primei etape, îi consacram un întreg capitol, după care cîte un capitol este dedicat fiecăruia dintre cei doi reprezentanți ai etapei a doua, Simion Stoilow și Florin Vasilescu. Din etapa a treia, reprezentată prin cîteva personalități de seamă, nu am ales, pentru o tratare distinctă, decît pe Alexandru Froda, care face obiectul ultimului capitol al primei părți. În a doua parte a cărții, dedicată unor interferențe ale gîndirii matematice românești cu unele domenii umaniste, ne ocupăm de matematicianul-poet Dan Barbilian, de esteticienii și filozofii puternic impregnați de spiritul științelor exacte, Pius Șerban Coculescu (cunoscut mai mult sub pseudonimul Pius Servien) și Matila C. Ghyka și de Grigore C. Moisil.

O selecție a unor personalități atît de eterogene poate părea arbitrară atîta vreme cît ne situăm în perspectiva unei expunerii care și-ar propune o prezentare cît mai obiectivă și mai sistematică a istoriei matematicii românești. Poate stîrni de asemenea mirare faptul că am considerat opera lui Servien ca o manifestare a gîndirii matematice; mulți dintre colegii mei matematicieni se vor fi întrebînd cine este acest matematician de care n-au auzit și ce teoreme a demonstrat el. Este de asemenea vizibilă o lipsă de unitate în ceea ce privește modul de abordare, deoarece în timp ce în discutarea unor personalități ca Pompeiu, Stoilow și Vasilescu sînt urmărite, de fiecare dată, repercusiunile și ecourile unui singur fapt matematic, la Dan Barbilian ne-au preocupat personalitatea umană și unele probleme de limbaj, la Alexandru Froda am urmărit cu precădere trăsăturile generale ale operei și personalității sale, iar la Pius Șerban Coculescu a stat în centrul atenției

noastre un anume mod în care niște idei foarte crude din punct de vedere matematic, dar foarte susceptibile de a primi o formalizare riguroasă, au devenit punctul de plecare al unui proces de modelare matematică a unor aspecte foarte importante privind structura generală a limbajelor umane de creație (științifică sau artistică) și fundamentarea unei estetici științifice.

Aceste mirări și semne de întrebare se vor risipi — credem — dacă vom spune că această carte este în mod deliberat foarte subiectivă, că prin ea propunem cititorilor o anumită lectură, care nu pretinde să fie decît una din multele lecturi posibile ale operelor matematice românești. Selecția pe care am operat-o a fost determinată într-o măsură atît de mare de elemente care țin de propria noastră biografie științifică, încît cartea de față poate fi considerată ca un mănunchi de mărturisiri ale unor experiențe care ne-au adus în contact cu cîteva opere și personalități remarcabile ale culturii noastre. Aceste opere și personalități s-au insinuat treptat, dar cu complicitatea noastră, atît de mult în propriile noastre preocupări, încît acum, cînd recitim paginile de față, elaborate de-a lungul a cîtorva ani, avem uneori impresia că am scris o carte autobiografică. Această impresie este foarte puternică în ceea ce privește capitolele dedicate lui Pompeiu, Stoilow, Moisil și Pius Șerban Coculescu, deoarece multe din cercetările noastre s-au referit nemijlocit la rezultate sau idei ale lor, căroră le-am urmărit cu emoție destinul, așa cum am încercat să-l convingem pe cititor în capitolele corespunzătoare. În ceea ce-i privește pe Vasilescu, Barbilian, Ghyka și Froda, ei nu au intrat încă *direct* în orbita preocupărilor noastre, dar, prin rezonanța pe care unele aspecte ale personalității și operei lor au produs-o, ei au influențat în mod decisiv preocupările noastre și preocupările pe care am căutat să le insuflăm unor colegi mai tineri și unor studenți.

Vom căuta acum să descriem unele aspecte ale ideilor și rezultatelor pe care le analizăm în cartea de față.

a) La fiecare dintre autorii discutați, atenția este îndreptată fie către un rezultat care a trecut multă vreme neobservat (Stoilow, Vasilescu), fie către un rezultat considerat multă vreme periferic în ansamblul operei din care el face parte (Pompeiu), fie către unele idei și probleme care abia în ultima vreme au început a fi fructificate (Servien, Ghyka) sau așteaptă încă să fie aprofundate (Barbilian,

Froda). De fiecare dată deci este în discuție un fapt căruia încercăm să-i dezvăluim un tâlc mult mai adânc decât cel care a putut fi sesizat anterior. Este, credem, o obligație față de opera științifică a predecesorilor de a o reconsidera în mod periodic și de a o reciti cu înțelegerea pe care ne-o dă cea mai recentă dezvoltare a științei. Vom constata atunci că operele științifice autentice se află într-o continuă devenire, ele nu sînt obiecte, ci procese a căror evoluție depășește considerabil intențiile inițiale ale autorului, sau pur și simplu se dezvoltă în direcții diferite (uneori chiar contrarii) de cele scontate de autor. Cele relatate în capitolele consacrate lui Pompeiu, Stoilow, Vasilescu și Servien sînt, credem, semnificative din acest punct de vedere. Aceeași situație apare și în preocupările de didactică a științei. Să luăm, de exemplu, o disciplină cu o veche istorie, analiza matematică. Un manual care expune noțiunile și rezultatele de început ale acestei discipline este departe de a fi univoc în prezentarea faptelor; prin accentele pe care le pune pe anumite lucruri în dauna altora, prin exemplele și aplicațiile pe care le dezvoltă, prin modul în care explică originea noțiunilor, motivează alegerea convențiilor și explică semnificațiile teoremelor, un astfel de manual poate să-l conducă pe cititor fie spre funcții de variabilă complexă, fie spre ecuații diferențiale, fie spre funcții de variabilă reală, fie spre analiză numerică, fie spre analiză funcțională. Cei care cunosc tratatele clasice de analiză matematică știu că chiar aceasta este situația. Fiecare profesor imprimă, deliberat sau nu, — chiar cursului celui mai elementar pe care-l predă studenților — o orientare spre propriul său domeniu de preocupări (evident, în ipoteza că un atare domeniu există și că este vorba de un curs propriu, nu de unul de compilație).

b) În ciuda situației periferice, secundare pe care o prezintă inițial multe din rezultatele, ideile și problemele luate în discuție, consecințele pe care ele le-au dezvoltat în perioada de cîteva decenii care s-a scurs de la apariția lor se dovedesc a fi de o deosebită amploare. Derivata lui Pompeiu, teorema lui Stoilow asupra structurii funcțiilor continue, teorema lui Vasilescu asupra aproximării funcțiilor arbitrare prin funcții continue, teoremele lui Froda asupra discontinuităților, problemele de limbaj ridicate de textele lui Barbilian și ideea lui Servien de a considera proprietatea de a admite fraze echivalente drept proprietatea funda-

mentală a frazelor din limbajul științific fie că și-au reliefat mereu noi și noi semnificații și consecințe, fie că așteaptă (ca în cazul lui Froda) pe cel care le va descifra.

c) Ni se pare interesant de observat că aproape fiecare dintre personalitățile discutate a fost, într-o măsură mai mare sau mai mică, victima unui proces de frustrare ale cărui dimensiuni cresc pe măsură ce faptele sînt cunoscute sub toate aspectele lor. Nu avem în vedere aici doar frustrarea explicită, publică, de tipul celeia care l-a afectat pe Pompeiu, care a trebuit să aștepte nota de confirmare a lui Denjoy pentru a nu mai fi suspectat că funcțiile sale sînt identic nule. Acest mod public de a contesta și, apoi, de a recunoaște valoarea unui rezultat nu numai că neutralizează frustrarea inițială, dar o transformă în contrariul ei, conferind rezultatului incriminat o deosebită popularitate. Avem în vedere o frustrare mult mai dureroasă și mai gravă, cu efecte mult mai profunde, acea frustrare care se manifestă nu prin contestare, ci prin ignorare. Această trecere sub tăcere a unui rezultat, a unei idei, a unui nume, ca și cum acestea n-ar exista, este cea mai ucigătoare dintre frustrări, ea riscă, prin proporțiile pe care, din păcate, le capătă, să denatureze istoria științei și chiar știința însăși. Invităm pe cititor ca asupra acestui aspect al cărții de față să se aplece cu deosebire. Paginile ei se vor piese la dosarul unui proces de recuperare a unor rezultate pe care mulți autori le-au ignorat sau le-au diminuat timp de decenii. Menționăm aici doar o mică parte a lor: Cum s-a putut preda atîția ani analiza matematică, fără a se observa că derivata lui Pompeiu constituie cel mai simplu și mai elementar exemplu de funcție care admite primitivă, dar nu este integrabilă pe nici un interval? Cum s-a putut scrie în atîtea tratate capitolul relativ la structura diferențială a funcțiilor continue, ignorîndu-se teorema lui Stoilow, de natură să confere acestui capitol o deosebită unitate și profunzime? De ce oare a trecut neobservată situația cu totul inedită pe care teorema de aproximare a lui Vasilescu o pune în evidență în ceea ce privește tipurile posibile de mulțimi excepționale în analiza matematică? De ce oare singurul tratat de analiză în care se amintește că autorul teoremei privind discontinuitățile de prima specie ale funcțiilor de variabilă reală este Alexandru Froda este tratatul profesorului Miron Nicolescu? De ce au trebuit să treacă aproape patruzeci de ani pentru

ca cultura noastră să-l încorporeze pe Pius Șerban Coculescu și nici pînă acum nu l-a încorporat pe Matila Ghyka? Iată numai cîteva întrebări dintr-o listă mult mai lungă. Mai sînt apoi atîția alții despre care nu am mai putut sau nu am fost încă sau nu vom fi nici de aici înainte în măsură să discutăm în deplină cunoștință de cauză (despre unii sperăm să ne ocupăm cu un alt prilej, despre alții s-au ocupat sau se vor ocupa cu mai multă competență acei colegi ai mei care, prin natura preocupărilor lor, au fost mai aproape de opera lor). Vom semnală totuși aici cîteva alte cazuri de frustrare care comportă o acțiune corespunzătoare de recuperare.

Ne vom referi mai întîi la surprinzătoarea reconsiderare pe care prof. Mircea Malița a realizat-o recent, relativ la opera multă vreme subapreciată și, uneori, chiar negată, a lui Spiru Haret, *Mecanica socială*. Considerăm fericită ideea Editurii Științifice de a o fi reeditat în 1969, readucînd astfel în atenție o lucrare de pionierat în domeniul utilizării modelelor matematice în științele sociale. Într-un articol recent (*Spiru Haret, a Romanian forerunner of mathematical modelling in the social sciences*, în volumul *The revolution in science and technology and contemporary social development*, Ed. Academiei R. S. R., București, 1974), prof. Mircea Malița reușește să pună într-o lumină cu totul nouă ideile lui Haret din *Mecanica socială*, plasîndu-le în perspectiva teoriei matematice a jocurilor de strategie. Anume, profesorul Malița recunoaște, în abordarea lui Haret, un joc de sumă nenulă între agricultorii care reclamau un preț ridicat al porumbului și industriașii care revendicau un preț mai scăzut. Este apoi identificată, în metaforele mecanice ale lui Haret, axa de negociere pe care Nash plasează punctul de echilibru și, implicit, soluția jocului (Mircea Malița trimite aici la lucrarea lui R. Duncan Luce și Howard Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley, New York, 1964, pp. 124—128).

Un al doilea exemplu la care ne vom referi va fi cel consemnat de profesorul Ciprian Foaș în legătură cu un rezultat mai vechi al profesorului Miron Nicolescu (*Academicianul Miron Nicolescu*, în „Progresele științei”, 1974, nr. 1). În cadrul cercetărilor d-sale privind funcțiile calorice (adică soluții ale ecuației căldurii

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u = 0),$$

prof. Miron Nicolescu a stabilit, în 1932, o teoremă de tip Liouville și, în continuare, în 1935—1937, pe baza unei formule originale de reprezentare, a obținut o puternică teoremă de unicitate pentru problema lui Cauchy la ecuația căldurii. Concomitent, teorema fusese obținută și de către matematicianul sovietic A. Tihonov. Datorită acestei situații, în care un același rezultat fusese obținut concomitent, dar independent (Tihonov își publicase articolul într-o revistă nu prea cunoscută la momentul respectiv, în timp ce articolul prof. Miron Nicolescu apăruse în „Commentarii Mathematici Helvetici”), teorema primise numele de Nicolescu-Tihonov. Dar ... ulterior anumite reviste și tratate de specialitate au înlocuit, în mod nedrept, această denumire prin aceea de „teorema lui Tihonov” și, în felul acesta, lumea matematică a uitat, treptat, de dubla paternitate a acestei teoreme. Avem aici un fel de frustrare inversă: recunoașterea inițială este abandonată, substituindu-se o regretabilă omisiune. Între timp, ameliorări substanțiale ale teoremei în discuție sînt obținute de matematicieni de seamă ca americanul Einar Hille, polonezul M. Kryżański, sovietica O. Ladyzenskaja și americanul Avner Friedman. Evoluția naturală a lucrurilor avea să restituie autorului cu dobîndă paternitatea care-i fusese un timp trecută sub tăcere. În 1965—1966, prof. Miron Nicolescu, într-un ciclu de articole publicate în „Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei”, avea să stabilească faptul că toate ameliorările obținute de autorii tocmai menționați pot fi obținute, în cazul ecuației căldurii, ca niște consecințe imediate ale formulei de reprezentare cu ajutorul căreia d-sa demonstrase, în 1935, teorema de unicitate. Mai mult decît atît, această formulă permite chiar o ameliorare a rezultatelor a căror regăsire Ța permis-o.

S-a petrecut astfel, cu formula de reprezentare a prof. Miron Nicolescu, o evoluție similară celeia pe care a avut-o teorema lui Stoilow discutată în capitolul care-i este consacrat. Formula a devenit un mijloc de aducere într-o albie comună a unor rezultate diferite, obținute de matematicieni de seamă ulterior obținerii ei. Rămîne ca, întocmai modului în care s-a procedat cu teorema lui Stoilow, să se tragă toate consecințele faptului că formula de reprezentare Nicolescu s-a dovedit matricea comună a unui număr atît de important de rezultate. Cum spune atît de frumos Ciprian Foiaș, „reintegrarea reprezentării Nicolescu a

funcțiilor calorice în circuitul matematicii mondiale obligă matematica românească la un efort susținut pentru utilizarea ulterioară a acestui fapt matematic adânc, a cărui înțelegere va mai cere timp și liniște" (loc.cit., p. 52).

Un al treilea exemplu semnificativ ni se pare cel privind teoria matematică a învățării. În 1935, profesorii Octav Onicescu și Gheorghe Mihoc publică faimoasa lor lucrare în care construiesc teoria lanțurilor cu legături complete, generalizare importantă a teoriei lanțurilor Markov. Teoria lanțurilor cu legături complete a fost primită de la început cu interes în lumea probabiliștilor. Ținând seamă și de contribuțiile românești ulterioare la această teorie (George Ciucu, Marius Iosifescu, Radu Theodorescu etc.), se poate probabil spune că ea constituie cea mai importantă manifestare a școlii românești de teoria probabilităților. Dar, ca orice teorie științifică fecundă, întreaga amploare a impactului pe care această teorie avea să-l exercite nu putea fi bănuită, în 1935, nici măcar de autorii ei. În anul 1955, americanii Robert R. Bush și F. Mosteller publică, în editura Wiley din Statele Unite, cartea *Stochastic Models for Learning*, în care, ignorând complet existența teoriei Onicescu-Mihoc a lanțurilor cu legături complete, încearcă să regăsească pe cont propriu unele porțiuni ale ei, în care vedeau instrumentul matematic cel mai adecvat pentru construirea unei teorii probabiliste a învățării. Era aici una din multele manifestări de ignorare în acea vreme, de către oamenii de știință americani, a unor realizări ale oamenilor de știință europeni. Ulterior însă, prioritatea românească în acest domeniu avea să fie recunoscută, autorii români fiind constant menționați, unii dintre cei mai importanți cercetători americani ai teoriei matematice a învățării (Maurice Kennedy, T. E. Harris, F. Mosteller și alții) recunoscând că teoria lanțurilor cu legături complete a profesorilor Onicescu și Mihoc constituie cel mai bun model probabilistic pentru studiul proceselor de învățare. Un rol de seamă în consolidarea și lansarea teoriei proceselor cu legături complete ca bază a teoriei matematice a învățării l-au îndeplinit probabiliștii români din generația tânără, în special Marius Iosifescu, care a extins utilizarea sistemelor cu legături complete de la studiul proceselor de învățare controlate de către subiecți (fără intervenția profesorului sau experimentatorului) la studiul unor procese de învățare cu profesori sau experimentatori activi.

Sistemele cu legături complete ale lui Iosifescu sînt mai generale decît lanţurile cu legături complete.

Rămînînd tot în domeniul teoriei probabilităţilor, vom da un al patrulea exemplu de frustrare: Deşi prima teorie probabilistă a automatelor finite a fost elaborată la Bucureşti, în 1963 (de către Octav Onicescu şi Silviu Guiaşu), datorită unei întîrzieri în publicarea lucrării ea nu a primit recunoaşterea de prioritate pe care o merita.

Un caz mai puţin obişnuit de frustrare, caz identificat abia în ultima vreme şi pe care-l semnalăm aici pentru prima dată, îl priveşte pe prof. Gabriel Sudan, autorul unor lucrări profunde de teoria mulţimilor şi de teoria numerelor, lucrări, din păcate, prea puţin cunoscute de tînăra generaţie de matematicieni. Identificarea acestui caz a făcut obiectul unei urmăriri care aminteşte de situaţiile pline de neprevăzut din unele romane poliţiste. O vom relata aici în toate detaliile.

Cu puţin timp înainte de a muri, prof. Gr. C. Moisil ne-a atras atenţia, într-un mod cu totul întîmplător, că primul exemplu de funcţie recursivă care nu este primitiv recursivă a fost dat de către prof. Gabriel Sudan. Împrejurarea în care am primit această veste nu ne-a permis să cerem explicaţii şi aşteptam cu înfrigurare un moment prielnic în care să-l putem aborda pe prof. Moisil în legătură cu acest subiect. Între timp însă au survenit plecarea d-sale în Canada şi evenimentul tragic care a făcut imposibilă reluarea acestei discuţii. Am relatat aceste lucruri cîtorva colegi mai tineri, cu care colaborăm, printre care cercetătorului Ionel Tevy de la Institutul de matematică şi studentului Cristian Calude de la Facultatea de matematică a Universităţii din Bucureşti. Dificultatea consta în primul rînd în identificarea articolului în care se afla exemplul cu pricina. Într-adevăr, în urma verificării listei de lucrări ale prof. Sudan (o astfel de listă se află în lucrarea lui George Şt. Andonie, *Istoria matematicii în România*, vol. III, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967, pp. 170—171) s-a constatat că nici una dintre lucrările sale ştiinţifice nu-şi propune obţinerea unui exemplu de tipul celui menţionat de către Gr. C. Moisil. Situaţia se complica însă datorită posibilităţii ca terminologia şi notaţiile folosite de către profesorul Sudan să fi fost atît de diferite de cele utilizate astăzi, încît să facă de nerecunoscut exemplul în chestiune. Într-adevăr, primul articol al prof. Sudan

apare în 1924, în timp ce noțiunea de funcție recursivă și terminologia corespunzătoare apar abia în deceniul al patrulea. Mai era posibil ca un atare exemplu să figureze implicit, în cadrul unor considerații relative la o cu totul altă problemă. După cum vom vedea, au fost și una și alta ...

După o examinare atentă a tuturor articolelor și cărților prof. Sudan, Cristian Calude își oprește atenția asupra articolului *Sur le nombre transfini* ω^ω , publicat în „Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences”, vol. 30, 1927, fasc. 1, pp. 11—30. Alegerea acestui articol nu era justificată de faptul că s-ar fi identificat în el exemplul căutat. Se ajunsese la el prin eliminare, deoarece despre celelalte se putea afirma cu certitudine că nu conțin exemplul căutat. Mai pleda pentru acest articol și faptul că era menționat la bibliografie în cartea clasică a lui Rosza Péter asupra funcțiilor recursive. Dar entuziasmul provocat de acest din urmă fapt fusese repede risipit. Într-adevăr, în cartea Roszei Péter nu există nici o trimitere, în text, la articolul lui Sudan, dar prezența acestui articol la bibliografie putea fi explicată prin faptul că unul din capitolele cărții se referă la recurența transfinită, adică exact la tema în care se încadra articolul prof. Sudan.

Am relatat aceste lucruri și lui Ionel Țevy, propunându-i să examineze cu atenție întregul text al acestui articol. Ionel Țevy are la un moment dat impresia de a fi identificat (la p. 13 a articolului!) un exemplu cu proprietățile dorite; în fapt, funcția în cauză era parțial recursivă, după cum avea să arate ulterior Cristian Calude, care, ambiționat de acest eșec, pornește din nou în căutarea exemplului dorit. Atunci când aproape orice speranță era pierdută, spre sfârșitul articolului (la p. 29), Calude reușește să găsească exemplul mult căutat, argumentul în această privință fiind stabilit prin efortul comun al lui Ionel Țevy și Cristian Calude.

Evident, autorul articolului *Sur le nombre transfini* ω^ω utilizează acest exemplu în cu totul alte scopuri decât cel pe care-l avem noi în vedere acum. Articolul apare în ianuarie-iunie 1927, deci este scris cel mai târziu în 1926, în timp ce noțiunile de funcție recursivă și funcție primitiv recursivă urmau să fie degajate abia cu câțiva ani mai târziu. În articol se amintește mai întâi noțiunea de „tip de variabilă” introdusă de Hilbert. Tipul T_1 de variabilă

parcurge elementele dintr-o anumită clasă de numere ordinale. O funcție al cărei argument și a cărei valoare constituie variabile de tipul T_1 este, prin definiție, o variabilă de tipul T_2 . Se pot defini, în continuare, variabile de tipul $T_3, \dots, T_n, \dots, T_\omega, T_{\omega+1}, \dots, T_{\omega^2}, \dots, T_{\omega^\omega}, \dots$. Rezultatul major obținut de G. Sudan afirmă că, în timp ce pentru definirea unui număr ordinal oarecare, dar mai mic decît ω^ω , este suficient tipul de variabilă T_1 (deci recurența ordinară), numărul ω^ω nu poate fi atins decît cu o variabilă de tipul T_2 (care comportă recurența transfinită). Recurența ordinară este aceea care corespunde unei variabile fundamentale (adică de tipul T_1) care parcurge numerele ordinale de prima clasă. În cadrul recurenței ordinare se lucrează cu o funcție $f(n)$ a cărei valoare este cunoscută pentru $n = 0$ și a cărei valoare $f(n+1)$ se deduce din valoarea $f(n)$. Într-o recurență transfinită, valoarea funcției în n depinde de valoarea ei în predecesorul lui n , în raport cu ordinea de tipul ω^k ($k \in \mathbb{N}$).

Vom mai aminti, urmîndu-l pe Calude, cîteva considerații din articolul prof. Sudan, care ne vor permite să prezentăm exemplul în discuție.

α) Mulțimea numerelor ordinale de a doua clasă nu este numărabilă.

β) (D. Hilbert). Fie $M = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ o mulțime de numere ordinale de a doua clasă. Există un număr ordinal $\lambda_n f(n)$ cu proprietățile: 1. $\lambda_n f(n)$ este mai mare decît orice $f(n)$ din M ; 2. Orice număr ordinal care îndeplinește condiția 1 este mai mare sau egal cu $\lambda_n f(n)$.

Particularizînd pe f , obținem: $\lambda_n n = \omega$, $\lambda_n(\omega + n) = \omega \cdot 2$, $\lambda_n \omega^n = \omega^\omega$, deci tabloul

1, 2, 3, ...	
$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots$	
$\omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \dots$	
$\omega \cdot 3, \omega \cdot 3 + 1, \omega \cdot 3 + 2, \dots$	
\vdots	
$\omega^2 \dots$	
\vdots	
$\omega^3 \dots$	
\vdots	
$\omega^\omega \dots$	
\vdots	

Hilbert a stabilit și o corespondență între elementele tabloului de mai sus și funcțiile de variabilă naturală, cu valori naturale (*Sur l'infini*, „Acta Mathematica”, vol. 48; citat după G. Sudan).

γ) Sistemele ordonate de k numere naturale pot fi ordonate după ordinea ω^k . Iată, de exemplu, cum pot fi dispuse perechile ordonate (a, b) după ordinea ω^2 . Vom spune că a precede pe b după ordinea ω^2 dacă și numai dacă $a = 2^{m_1}(2n_1 + 1) - 1$, $b = 2^{m_2}(2n_2 + 1) - 1$ și $m_1 < m_2$ sau $m_1 = m_2$ și $n_1 < n_2$.

δ) Orice ordine de tipul ω^2 poate fi adusă la o recurență ordinară dublă și reciproc (Rosza Péter, *Recursive functions*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967).

ε) Se spune că două numere naturale a și b sînt ordonate după ordinea de tipul ω^ω dacă $a = 2^{m_1}(2n_1 + 1) - 1$, $b = 2^{m_2}(2n_2 + 1) - 1$, unde $m_1 < m_2$ sau $m_1 = m_2$ și n_1 precede pe n_2 pentru k oricît de mare, după ordinea ω^k . Vom spune, în acest caz, că a precede pe b în raport cu ordinea ω^ω .

φ) Iată acum exemplul de funcție recursivă care poate fi găsit la p. 29 din articolul prof. Sudan:

$$\begin{aligned}\psi(a, b, 0) &= a + b, \\ \psi(a, b, n + 1) &= t_c(a, \lambda_m \psi(c, m, n), b),\end{aligned}\quad (*)$$

unde

$$\begin{aligned}t_c(a, f(c), 0) &= a, \\ t_c(a, f(c), n + 1) &= f(t_c(a, f(c), n)),\end{aligned}\quad (**)$$

b este un număr natural, a este un număr ordinal transfinit, $f(c)$ este o variabilă de tipul T_1 iar λ este operatorul lui Hilbert definit la punctul β.

Printr-o analiză atentă a acestui exemplu, Ionel Ţevy și Cristian Calude au reușit să arate, pe cale directă, că funcția ψ nu este primitiv recursivă. Ținînd seamă că în orice caz ψ este (general) recursivă, ψ îndeplinește condițiile anunțate.

*

După cum se poate vedea, articolul în discuție conține mult mai mult decît exemplul identificat mai sus; din argumentarea autorului rezultă că funcțiile primitiv recursive sînt exact acele funcții recursive care corespund unui tip de ordine inferior lui ω^ω , în timp ce funcțiile recursive care

nu sînt primitiv recursive sînt exact acele funcții recursive care corespund tipului de ordine ω^ω .

În cartea sa, Rosza Péter, referindu-se la un exemplu al lui W. Ackermann (*Zur Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*, „Mathematische Annalen”, vol. 99, 1928, pp. 118—133), afirmă la p. 106 următoarele: „By this definition, Ackermann gave the first example of a function which is not primitive recursive”. Evident, este vorba de o exagerare, deoarece în 1928 nici măcar nu era introdusă noțiunea de funcție primitiv recursivă. După cum se știe, conceptele de recursivitate, calculabilitate și toate chestiunile aferente lor au apărut abia în deceniul al patrulea al secolului nostru (Kleene, Gödel, Turing etc.). Ca și Sudan, Ackermann nu a dat, ci a folosit fără să-și dea seama o funcție recursivă care nu este primitiv recursivă. Exemplul lui Ackermann este reprodus, prin intermediul cărții clasice a lui Rosza Péter, în monografia relativ recentă a lui Samuel Eilenberg și Calvin C. Elgot (*Recursiveness*, Academic Press, New York-London, 1970, pp. 73—81). Dar, după cum se poate vedea, prioritatea în această privință aparține lui Gabriel Sudan, care și-a publicat exemplul cu cel puțin un an mai devreme și care, în plus, a stabilit un rezultat care, într-o viziune aposteriori, s-a dovedit deosebit de semnificativ în ceea ce privește natura funcțiilor recursive prin care obținem diferite numere ordinale mai mici sau egale cu ω^ω .

Ulterior stabilirii faptelor consemnate mai sus, Cristian Calude a avut fericita idee de a merge la articolul lui Ackermann, pentru a stabili „pe text” diferența de natură dintre exemplul acestuia și cel al prof. Sudan. Rezultatul acestei confruntări a fost surprinzător: Ca și exemplul prof. Sudan, cel al lui Ackermann este obținut prin suprapunerea a două funcții, una dintre ele, cea notată de prof. Sudan cu t_e , fiind preluată întocmai (doar cu diferențe de notație și cu o permutare a primelor două argumente) de către Ackermann, în timp ce a doua, Ψ în notația prof. Sudan, este modificată ușor de către Ackermann, în sensul că argumentele numere ordinale sînt înlocuite cu argumente naturale [plus schimbarea de notație constînd în înlocuirea lui ψ cu ϕ și înlocuirea argumentului notat de prof. Sudan cu a printr-un argument — notat $\alpha(a, n)$ — funcție de a și de n ; această ultimă înlocuire are ca efect doar modificarea valorii funcției ϕ în

punctul $(a, 0, n + 1)$]. Așadar, exemplul lui Ackermann este

$$\begin{aligned}\varphi(a, b, 0) &= a + b, \\ \varphi(a, b, n + 1) &= g_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b),\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}g_c(f(c), a, 0) &= a, \\ g_c(f(c), a, n + 1) &= f(g_c(f(c), a, n)).\end{aligned}$$

Ca și la prof. Sudan, exemplul este, evident, folosit în alte scopuri decât cel pe care îl avem în vedere aici. Influența exercitată de articolul prof. Sudan asupra demersului lui Ackermann este vizibilă — după cum a observat tot Cristian Calude — și în alte locuri ale articolului său, unde preia de asemenea unele idei ale prof. Sudan; de exemplu, funcția

$$\begin{aligned}\psi(a, 0) &= \alpha(a), \\ \psi(a, b + 1) &= \mathcal{E}_c(a, b, \psi(c, b))\end{aligned}$$

de la p. 129 a articolului lui Ackermann este întocmai (cu o schimbare de notație și o permutare de argumente) funcția

$$\begin{aligned}\varphi(a, 0) &= \alpha(a), \\ \varphi(a, n + 1) &= \beta_c(a, \varphi(c, n), n)\end{aligned}$$

de la p.21 a articolului prof. Sudan.

Articolul lui Ackermann, apărut în 1928, poartă, ca dată de primire la redacție, 20 ianuarie 1927, adică momentul în care articolul prof. Sudan apărea. Ackermann și-a elaborat deci articolul înainte de apariția articolului prof. Sudan. Totuși, ținând seama de relațiile apropiate dintre Ackermann și Sudan [să nu uităm că prof. Sudan a petrecut în Germania perioada anilor 1922—1925, când, lucrînd în preajma unor mari matematicieni ca David Hilbert (care a fost și președintele comisiei care a prezidat teza sa de doctorat), E. Landau, R. Courant și Hermann Weil, nu se putea să nu intre în contact și cu W. Ackermann, cu care avea preocupări comune și care se afla în anturajul lui Hilbert], este neîndoielnic că Ackermann a cunoscut conținutul articolului prof. Sudan înainte de apariția acestuia. O confirmare a acestei ipoteze o constituie următoarea

referință făcută de Ackermann la p.119 a articolului său (reproducem un context mai larg, pentru edificare):

„Wir stellen nun im folgenden eine Funktion auf, von der wir beweisen, dass sie nicht ohne den zweiten order einen höheren Typ definiert werden kann. Mit Hilfe der dabei benutzten Methode wird man auch für andere Gruppen unschwer den Beweis führen können, dass sie den Funktionenbestand erweitern. [Aici se face o trimitere la o notă de subsol, după cum urmează: *Eine Arbeit, die mit der verliegenden manche Berührungspunkte, wird von Herrn G. Sudan publiziert Werden.* Es handelt sich bei ihr um die Definition von Zahlen der zweiten Zahlklasse, die man in ähnlicher Weise klassifizieren kann wie die Definitionen der reellen Zahlen“ (sublinierea ne aparține — S.M)].

Rezultă clar, din rîndurile de mai sus, că Ackermann se referă la niște rezultate încă nepublicate ale lui Sudan, rezultate pe care probabil le-a cunoscut din discuțiile directe cu acesta din urmă, în perioada în care Sudan lucra la teza de doctorat (susținută în 1925), sau ulterior, din corespondența cu acesta. Nesiguranța lui Ackermann cu privire la locul și data publicării articolului lui Sudan ar putea explica absența unei referințe mai precise. Totuși, dacă aceasta putea fi situația atunci cînd Ackermann și-a elaborat lucrarea, nu se poate pune decît pe seama unei neglijențe sau scăpări faptul că nu a precizat referința în cauză cu prilejul corecturii, deoarece neîndoielnic corectura unui articol depus la redacție în ianuarie 1927 și publicat în 1928 nu putea avea loc decît într-un moment în care articolul prof. Sudan era de mult apărut. Chiar dacă revista românească în care Sudan își publicase articolul a ajuns cu întîrziere în Germania, Ackermann, fiind din timp avertizat, putea obține informația bibliografică de rigoare.

Fapt este că această lacună din referința pe care Ackermann o face la Sudan l-a frustrat pe acesta din urmă de o prioritate pe care toate piesele aflate la dosar o atestă fără cel mai mic echivoc; *paternitatea profesorului Sudan asupra primului exemplu de funcție recursivă care nu este primitiv recursivă este în afara oricărei îndoieli.* Lacuna inițială din citarea lui Sudan de către Ackermann se agravează la Rosza Péter prin omisiunea numelui lui Sudan, căruia i se substituie cel al lui Ackermann (parcă simțindu-și păcatul, Rosza Péter îl trece totuși pe Sudan la bibliografia de la

sfișitul cărții ei) și apoi omisiunea se propagă mai departe, în cărțile actuale de logică matematică, dintre care cea a lui Eilenberg și Elgot n-a fost decît un exemplu.

Acest procedeu de inserare la bibliografia finală a unei lucrări la care — în mod nedrept — nu se trimite în text a fost aplicat și de către R. Bittner în monografia sa *Algebraic and analytic properties of solutions of abstract differential equations* („Rozprawy Matematyczne”, vol. 41, 1964, 64p.) articolului prof. Miron Nicolescu *Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire*, „Studia Mathematica”, vol.16, 1958, pp.353—363), în ciuda faptului că în o serie de articole anterioare relative la probleme similare (*Operational calculus in linear spaces*, „Studia Mathematica”, vol.20, 1961, pp.1—18; *On a new definition of polynomials*, „Bull. Acad. Polon. Sci.”, Cl. III, vol.9, 1961, pp.79—84 etc.) același articol al prof. Nicolescu este utilizat în mod substanțial, recunoscîndu-se rolul său în edificarea unui calcul operațional abstract (deci fără utilizarea transformării Laplace) în spații liniare.

Un cititor grăbit ar putea compara „isprava” prof. Sudan cu aceea a lui Lebesgue, care devenise, la începutul secolului nostru, autorul involuntar al primului exemplu de mulțime analitică neborliană. Asemănarea este totuși șubredă. Lebesgue, nu numai că nu avea intuiția semnificației exemplului său, ci dimpotrivă el considera că mulțimea în cauză este borliană. Dimpotrivă, Sudan, nu numai că a demonstrat o intuiție profundă a situației care avea să fie cristalizată cu cîțiva ani mai tîrziu, dar a pus în evidență niște fapte nedepășite nici astăzi, privind legătura dintre funcțiile calculabile și ordinalele de diferite clase.

Vom încheia, observînd faptul remarcabil că, la aproape 50 de ani de la publicarea exemplului lui Sudan, nici o simplificare nu a intervenit în structura exemplelor de funcții recursive care nu sînt primitiv recursive. Profesorul Gabriel Sudan, autor al primului exemplu de funcție recursivă care nu este primitiv recursivă, a mers la țintă pe o cale care nu a mai putut fi scurtată și are puține șanse să fie în viitorul apropiat.

d) Studiul întreprins asupra celor patru personalități considerate în a doua parte a cărții atrage atenția asupra vocației interdisciplinare a gîndirii științifice românești, pe linia inaugurată de Spîru Haret prin *Mecanica socială*. Haret, Barbilian, Servien, Ghyka, Moisil au manifestat,

fiecare în felul său, tendința de a proiecta gândirea matematică în cea umanistă. Mai sînt însă multe cercetări de întreprins pentru a preciza adevărata amploare și semnificație a contribuției lor în acest domeniu. În aceeași ordine de idei vom avea de luat în considerare cîteva personalități importante, în viață, dintre care vom menționa aici pe profesorul Octav Onicescu, pe N. Georgescu-Roegen și pe Ștefan Lupașcu. Itinerariul „energiei informaționale” a lui Onicescu cuprinde azi aproape toate teritoriile disciplinelor social-umaniste, iar ideea de entropie, atît de importantă în opera prof. Onicescu, revine în concepțiile economice ale lui Georgescu-Roegen și în filozofia atît de originală a lui Lupașcu. (Opera acestuia din urmă, deja discutată la noi, cu deosebit succes, de către Constantin Noica și Victor Săhleanu, numără cîteva lucrări puternic impregnate de spiritul științelor exacte; menționăm *La tragédie de l'énergie* (Casterman), *Science et Art abstrait* (Juillard), *Le principe d'antagonisme et la logique de l'énergie* (Hermann) și mai cu seamă ultima sa carte, din 1974, *L'énergie et la matière psychique. Ses logiques normales et pathologiques* (Juillard).) Ideea prof. Miron Nicolescu privind dicționarul axiomatic a stîrnit interesul unui mare număr de lingviști, care au reluat-o și discutat-o în contextul lexicologiei contemporane.

Vom încheia această *Introducere* cu o încercare de a sintetiza, din unghiul de vedere care ne-a fost accesibil, opera și personalitatea celui căruia îi dedicăm această carte, nu doar pentru a ne fi îndrumat, în urmă cu un sfert de veac, primii pași în cercetare, ci în primul rînd pentru că, prin influența pe care a exercitat-o asupra noastră, ne-a ajutat în mare măsură să ne cristalizăm o viziune culturală asupra matematicii.

Rămîne însă ca o cercetare ulterioară să reia mai sistematic și mai detaliat itinerariile acestei opere.

«Pînd la proba contrarie, pentru mine orice om este bun și îi acord încredere» (Miron Nicolescu)

Opera matematică a prof. M. Nicolescu este impresionantă prin unitatea, profunzimea și eleganța ei. Interesat în primul rînd în problemele de structură a unor clase de funcții care apar în mod natural în analiză, în special în studiul anumitor tipuri de ecuații cu derivate parțiale, prof. M. Nicolescu a creat și a dus la perfecțiune teoria

funcțiilor poliarmonice, de care și-a legat numele în mod organic și căreia i-a dat aceeași sudură impecabilă pe care o are teoria clasică a funcțiilor armonice; (Monografia d-sale *Les fonctions polyharmoniques* publicată la Paris în 1938, într-o colecție celebră, a devenit de mult și, ceea ce este mai important, continuă să rămână o carte fundamentală, de referință permanentă); a pus bazele teoriei funcțiilor policalorice, desăvârșind-o prin rezultate de o neasemuită eleganță. Mari matematicieni ai secolului nostru, ca J. Hadamard, P. Montel, M. Picone, au dat o înaltă apreciere acestor contribuții, care dealtfel au devenit clasice la scurt timp după apariția lor; ele sînt curenți astăzi în matematică — și chiar în mecanică — în însăși terminologia introdusă de către prof. M. Nicolescu.

Ca o continuare firească, prof. M. Nicolescu a studiat trei tipuri de analiticitate: eliptică, hiperbolică și parabolică, cărora le-a dat o sinteză strălucită, folosind aparatul analizei funcționale. S-a cristalizat astfel studiul analiticității în raport cu un operator oarecare.

Numeroasele lucrări științifice publicate în cei cincizeci de ani de activitate matematică sînt, direct sau indirect, subordonate unui scop unic. Ca un arhitect care și-a fixat de la început, cu luciditate și clarviziune, linia principală a edificiului pe care-l va ridica, prof. M. Nicolescu a urmat, de-a lungul anilor, cu consecvență și cu migală, firul ideilor sale de început, cînd își propusese să construiască o teorie a analiticității pentru spații cu mai multe dimensiuni. Lărgind mereu perspectiva și modul de punere a problemei, în funcție de noile etape de dezvoltare a matematicii, prof. M. Nicolescu a dus la desăvîrșire un edificiu matematic care îmbină armonios liniile clasice cu cele moderne.

*

Nu vom face aici o analiză amănunțită a operei matematice a prof. M. Nicolescu, analiză pe care am întreprins-o deja, în colaborare cu N. Dinculeanu și C. Foaș, în „Gazeta matematică”, seria A, 1963, pp. 538—555*.

* Pentru bibliografia lucrărilor prof. Miron Nicolescu, a se vedea atît bibliografia publicată ca anexă la articolul din „Gazeta matematică”, 1963, cît și bibliografia publicată în volumul *Institutul de matematică al Academiei R. S. R. (București și Iași), 20 de ani de activitate (1949—1969)*, Ed. Academiei R. S. R., București, 1970.

Vom încerca doar să desprindem câteva aspecte care, laolaltă, conferă o fizionomie deosebit de caracteristică operei matematice a prof. M. Nicolescu.

Un prim aspect semnificativ îl constituie *consecvența cu care prof. M. Nicolescu a urmărit problemele care l-au preocupat și legătura organică dintre aceste probleme*. Vom alege, pentru ilustrare, ciclul de 15 articole relativ la analiza polidimensională, ciclu care a determinat la noi în țară o întreagă școală, al cărei rod ar merita să fie consemnat într-o monografie. După cum se știe, acest ciclu este inaugurat în 1938, printr-un articol care-și propune doar să înlocuiască, în trei teoreme ale lui Bögel, ipoteza derivabilității polidimensionale prin aceea a continuității polidimensionale. Au mai urmat câteva contribuții care erau, fiecare, ca niște izvoare de munte despre care nu se putea încă ști atunci, în anii anteriori războiului, că se vor uni treptat în râuri și apoi în marele fluviu pe care l-a constituit amplul memoriu din 1952, *Contribuții la o analiză de tip hiperbolic a planului*. Acest fluviu a crescut la rîndul său, unindu-se cu alte fluvii, cum ar fi acela al poli-armonicității și al parabolicității.

Putem spune că evoluția ideilor a urmat, la prof. M. Nicolescu, o traiectorie arborescentă, de la periferia arborescenței către trunchiul ei. Așa cum, într-o arborescență, de la fiecare nod periferic nu se poate ajunge decît într-un singur loc — la centrul ei — și aceasta într-un singur mod, tot așa putem spune că fiecare dintre articolele de început ale prof. M. Nicolescu conține, în germene întreaga evoluție ulterioară, de la fiecare dintre ele se ajunge în mod natural la sinteza operată în anii din urmă.

Un al doilea aspect semnificativ este *modul în care contribuțiile prof. M. Nicolescu stau de fiecare dată sub semnul unor analogii profunde*. În 1940, căuta — și găsea — pentru continuitatea și derivata polidimensională, pentru continuitatea în medie circulară și laplacenii generalizați, analogul proprietății de conservare prin convergență uniformă a continuității clasice și a faptului de a fi o derivată. În 1950 se întreba asupra analogului, în analiza polidimensională, al teoremei lui Weierstrass de aproximare a funcțiilor continue prin polinoame și obținea, ca răspuns, acel rezultat de alură clasică privind aproximarea uniformă a funcțiilor hiperbolic continue prin polinoame hiperbolice. Apoi, stabilea analogul global al unor rezultate celebre

privind raportul dintre diferențiabilitate și existența derivatelor parțiale, dezvoltarea lui Taylor, criteriul de analiticitate al lui Bernstein, integrarea prin părți etc. Din aceste analogii între probleme și rezultate izolate s-au cristalizat treptat analogii mult mai cuprinzătoare, între întregi teorii și domenii ale analizei: între analiza clasică și analiza globală, între analiticitatea hiperbolică și cea armonică sau parabolică. S-a ajuns astfel la adevărate analogii între analogii, deoarece fiecare dintre cele trei teorii ale analiticității — hiperbolică, armonică și parabolică — avea la bază o analogie cu analiticitatea clasică. Recunoaștem aici modul în care Banach definea profesia de matematician: A fi matematician, observa Banach, înseamnă a fi capabil de analogii între noțiuni, între probleme, între rezultate, între teorii și între analogii.

Pentru prof. Miron Nicolescu, matematica se construiește în etaje care repetă, la diferite niveluri de abstracție, aceeași arhitectură. Analogiile pe care le frecventează sau le dezvoltă merg totdeauna la esența lucrurilor, au o legitimare profundă și, în ciuda (sau tocmai datorită) pregnanței lor, sînt de cele mai multe ori legate de deosebite dificultăți tehnice de demonstrație.

Ajungem astfel la un al treilea aspect semnificativ al operei prof. M. Nicolescu, acela al *tendințelor unificatoare*. Cele trei teorii ale analiticității s-au unit în teoria mai cuprinzătoare a analiticității în raport cu un operator diferențial liniar. Fiind dat un operator diferențial liniar L , să se caute în ce condiții se poate dezvolta o funcție u , indefinit diferențiabilă, în serie de puteri ale unei anumite soluții v a ecuației $Lv = 1$, coeficienții fiind soluții ale ecuației $Lv = 0$.

Această tendință unificatoare se observă și în unele contribuții de mai mică amploare, dar cu larg și îndepărtat ecou. În 1933, prof. M. Nicolescu s-a întrebat asupra posibilității de a se unifica metodologic teoria integralei Riemann cu aceea a integralei Lebesgue și și-a pus problema unei definiții de tip Lebesgue pentru integrala Riemann, după ce, cu vreo opt ani mai devreme, olandezul J. Ridder eșuase într-o întreprindere similară. A reușit în această tentativă (concomitent cu O. Frink, jr., dar independent de el), realizînd astfel un deziderat simetric cu cel la care Denjoy ajunsese cu doi ani mai devreme, cînd obținea o construcție riemanniană a integralei Lebesgue.

Aceste analogii și tendințe de unificare sînt corelate, în opera prof. M. Nicolescu, cu ceea ce am considera un al patrulea aspect semnificativ, anume *ideea de prelungire*. „Atenția cercetătorilor a fost deseori îndreptată” — observă prof. M. Nicolescu în introducerea la un memoriu din 1951 — „asupra problemei de a defini operatori diferențiali iterați printr-o singură operație de trecere la limită. Ce se întîmplă în aceste condiții? Sau clasa funcțiilor cărora li se aplică operația directă D^* este identică cu clasa funcțiilor cărora li se aplică operația iterată D ; sau prima dintre aceste clase este mai largă decît a doua. În al doilea caz, clasa funcțiilor la care se aplică operatorul D^* *prelungeste* cealaltă clasă”. Toți cei care au avut privilegiul de a audia prelegerile prof. M. Nicolescu știu cît de mult îi place să accentueze verbul *prelungeste*.

Mereu alți operatori diferențiali iterați aveau să joace rolul acestui operator D și mereu alții aveau să joace rolul lui D^* , care mereu se afla în a doua variantă a alternativei de mai sus. Caracterizarea funcțiilor armonice prin proprietatea de invarianță prin mediațiune circulară, aplicarea aceluiași principiu la laplacianul iterat de un ordin oarecare (și care avea să conducă la studiul funcțiilor poliarmonice), derivata bidimensională, ca modalitate de studiere directă a derivatelor parțiale mixte de ordinul al doilea, diferențiala totală directă de ordinul al doilea, studiul de mai tîrziu al operatorilor eliptico-parabolici, se subsumează, toate, acestei idei simple, dar profunde, a prelungirii razei de acțiune a unui obiect matematic, prin reprezentarea sa cu ajutorul altui obiect matematic.

Această adevărată obsesie a prelungirii este legată de o altă frumoasă obsesie, în care vedem un al cincilea aspect semnificativ al operei prof. M. Nicolescu: *grija de a trage consecințele propriilor d-sale rezultate*.

Într-un important memoriu din 1952, se observa că Charles de la Vallé Poussin nu a știut să tragă consecințele observațiilor sale penetrante, privind posibilitatea pe care derivatele de mulțime superficială o au de a corespunde unor derivate parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor de punct. Aceste consecințe a știut să le desprindă prof. M. Nicolescu, după cum tot d-sa a știut să desprindă consecințele necesare din propriile d-sale rezultate, ajungînd astfel să cristalizeze o operă de o desăvîrșită coeziune și unitate.

Modul natural în care rezultatele prof. Miron Nicolescu purced unul dintr-altul are însă și o altă explicație, în care vedem un al șaselea aspect semnificativ și care constă în *motivarea, de fiecare dată cu anticipare, a construcției pe care urmează s-o efectueze*. În aproape fiecare memoriu, primele pagini indică arhitectura întregii construcții, etapele principale ale demersului pe care-l va întreprinde. Un adevărat model al genului îl constituie, în această privință, introducerea la memoriul din 1952, privind analiza hiperbolică :

„Ideea care stă la baza teoriei funcțiilor de mai multe variabile este individualizarea fiecărei variabile independente. Atunci când scriu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ înțeleg că f este funcție de x_1 și de x_2 etc., iar fiecare din aceste variabile apare ca atare în enunțuri și formule. Noțiunea fundamentală, corespunzătoare derivatei pentru funcțiile de o singură variabilă, este noțiunea de diferențială totală. Or, aceasta este o formă *liniară* de diferențialele variabilelor independente. Analiza bazată pe o astfel de concepție poate fi numită, din această cauză, o *analiză liniară* a planului sau a spațiului cu $n > 2$ dimensiuni etc.”.

În urma unei astfel de introduceri, ideea considerării unei funcții de mai multe variabile ca o funcție de ansamblul acestora se prezintă cititorului în modul cel mai natural. Autorului nu-i rămîne decît de a schița istoricul încercărilor de elaborare a unei astfel de analize globale, începînd cu Lebesgue și continuînd cu Bögel și alții. Se cristalizează astfel stadiul cercetărilor în acest domeniu, natura problemelor rezolvate și întrebările care-și așteaptă răspunsul. În acest moment, totul este pregătit pentru ca autorul să schițeze planul lucrării, într-un mod care să confere o deplină motivare problemelor abordate și o semnificație clară rezultatelor obținute :

„Unul dintre rezultatele fundamentale ale lucrării îl constituie o dezvoltare a unei funcții cu anumite proprietăți diferențiale, dezvoltare în același timp analoagă dezvoltării lui Taylor și dezvoltării lui Almansi. Această dezvoltare permite să fie bogată în consecințe. Unele dintre aceste consecințe sînt expuse în lucrarea de față, dar subiectul este departe de a fi epuizat”. Apoi se expune conținutul fiecărui paragraf, anticipîndu-se principalele noțiuni și rezultate.

După lectura acestor considerații introductive, cititorul este pe deplin avertizat asupra liniilor mari ale drumului

care urmează să fie parcurs, este convins de necesitatea de a parcurge acest drum, de modul natural în care acest drum s-a desprins din drumurile anterioare și așteaptă cu nerăbdare să contemple detaliile acestei călătorii, care se anunță de la început captivantă. Prof. Miron Nicolescu nu cultivă, în matematică, genul criptic, în care o definiție sau o teoremă își amână mereu scadența pe mai târziu — sau pentru niciodată — încît cititorul se hrănește mereu din speranța că dezvoltarea ulterioară îi va aduce satisfacția pe care textul deja parcurs nu i-a putut-o oferi. Fiecare definiție este introdusă exact atunci cînd este nevoie de ea. Dar aceasta nu înseamnă că în opera d-sale nu avem și satisfacția unor interesante considerații cu caracter aposteriori.

Una din ideile care revin repetat în această operă este aceea a *distincției dintre aspectele locale, individuale și cele globale de ansamblu, ideea legăturii dintre aceste aspecte*. Vedem în această idee un al șaptelea aspect semnificativ. Astfel, în 1938 pornind de la o noțiune simplă, aceea de mulțime liniară de funcții și de închidere a unei astfel de mulțimi, obține o sinteză surprinzătoare a unor rezultate clasice ale lui Lebesgue și Baire și observă că, în timp ce conceptul de mulțime liniară conduce la aspecte pur globale, conceptul mai special de mulțime liniară completă (obținut prin adăugarea aditivității ca proprietate de mulțime) dă posibilitatea obținerii unor rezultate cu caracter local. În 1950, într-un articol de o mare profunzime asupra proprietăților aditive de mulțime, se discută, în cadrul aceleiași distincții dintre local și global, diferite tipuri de convergență pentru șiruri de funcții analitice, armonice, poliarmonice și se ajunge la dezvoltarea faptului că rezultate matematice aparent disparate ca teorema lui Montel pentru șirurile uniform convergente de funcții armonice și teorema lui Hartogs privind olomorfia unei funcții analitice sînt manifestări ale unui singur fenomen.

Revine mereu, în opera prof. M. Nicolescu, problema determinării unei comportări globale printr-o proprietate locală. Este suficient ca o serie de funcții convexe nenegative să convergă într-un singur punct pentru ca să convergă uniform pe tot intervalul de definiție, demonstra în 1938. Global, funcțiile armonice se comportă ca și funcțiile armonice ordinare. Dar, individual, ele sînt foarte diferite, observă altă dată.

Una din caracteristicile construcțiilor matematice interesante constă în faptul că instrumentele secundare, ajutătoare, de care ele se folosesc prezintă de multe ori un interes de sine stătător. Această situație o întâlnim și în opera prof. M. Nicolescu și o considerăm al optulea aspect semnificativ al ei. Astfel, în 1940, într-o lucrare dedicată modului în care convergența uniformă păstrează unele proprietăți care apar în analiza bidimensională, este nevoie la un anumit moment de o extensiune a următoarei teoreme a lui Orrin Frink, jr. : Dacă f_n este un șir uniform (într-un sens pe care nu-l putem explica aici) în orice punct dintr-un domeniu mărginit și dacă f_n este convergent în orice punct din acest domeniu, atunci șirul f_n este uniform convergent. Prof. Miron Nicolescu arată că este suficient ca șirul f_n să fie convergent într-un singur punct pentru ca să rezulte convergența uniformă în tot domeniul. (Din nou, legătura organică între local și global.)

În 1952, tot ca un rezultat auxiliar (în memoriul dedicat derivabilității polidimensionale) se restabilește, într-o formă mai generală, o formulă de integrare prin părți pentru integrala dublă.

În 1946, ca un rezultat auxiliar de care era nevoie în stabilirea, în condiții foarte generale, a formulei a doua de medie pentru integrala dublă, se demonstrează o frumoasă teoremă privind funcțiile superficial monotone în sensul invariabilității de semn a diferenței bidimensionale. Punctele în care o astfel de funcție este discontinuă Cauchy formează o mulțime numărabilă. În plus, se arată că punctele de discontinuitate Cauchy ale unei funcții total monotone coincid cu punctele ei de discontinuitate în sens bidimensional. (Amintim că o funcție $f(x, y)$ este total monotona în intervalul bidimensional J dacă pentru orice $h > 0$, $k > 0$ astfel încât $(x, y) \in J$, $(x + h, y + k) \in J$, expresiile $f(x + h, y) - f(x, y)$, $f(x, y + k) - f(x, y)$, $f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$ păstrează, toate, un același semn în J .) Paralelismul cu funcțiile de o singură variabilă este deci perfect. Și aici, analogiile și extensiunile sînt de substanță, ele comportă o metodologie inedită față de cazul clasic.

Am lăsat la sfârșit un aspect de o semnificație deosebită. *Modestia etică* (nu științifică !) îl face pe prof. M. Nicolescu să atribuie altora anumite inițiative și să-și asume doar rolul celui ce completează aceste inițiative. În lucrările d-sale privind analiza polidimensională, mereu i se atribuie lui Karl Bögel inițiativa de amploare a acestei analize. Să ne fie îngăduit să observăm că Bögel a construit analiza polidimensională ca un scop în sine, ca o construcție care-și este suficientă sieși, în timp ce prof. M. Nicolescu a reușit să dea acestei analize o legitimare mult mai amplă, prin joncțiunea pe care o stabilește cu operatorii diferențiali fundamentali din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale.

*

Activitatea de profesor a acad. M. Nicolescu s-a caracterizat de la început printr-o ținută științifică și pedagogică exemplară, care se păstrează vie în memoria celor ce i-am fost studenți. Cursurile sale au constituit o cotitură în predarea analizei matematice la Universitatea din București. Lecțiile sale constituiau pentru noi o adevărată descoperire ; descopeream adevărata analiză matematică, cu perspective nebănuite și exercitînd o atracție copleșitoare asupra spiritului ; descopeream că o oră de curs nu trebuie să fie o copie a cursului litografiat sau tipărit, ci un mijloc specific de comunicare între profesor și studenți, în care se dezvăluie partea vie, am putea spune umană, a științei ; mai descopeream cum, pe nesimțite, o oră de predare a matematicii devine și o oră de educație a gândirii și a inimii.

Dacă școala românească de analiză matematică este astăzi atît de puternică și înfloritoare, acest fapt își are una din cauzele sale în nivelul înalt — științific și pedagogic — al acestei discipline la Universitatea din București și acest nivel înalt este nemijlocit legat de personalitatea prof. M. Nicolescu. La orele sale ni se oferea nu o matematică gata făcută, ci o invitație de a pătrunde în laboratorul ei de creație, o participare pasionantă la nașterea noțiunilor și teoremelor matematice.

*

Manualele de analiză publicate de către prof. M. Nicolescu și, în special, tratatul în trei volume, publicat în jurul anilor 1960, ilustrează într-un mod fericit personali-

tatea d-sale de om de știință și pedagog. Aproape toți tinerii matematicieni din țara noastră, independent de specializarea lor ulterioară, sînt tributari cursurilor și manualelor d-sale, audiate sau studiate. Prin viziunea personală care stă la baza sa, prin echilibrul care se stabilește între aspectele de analiză clasică și cele de analiză funcțională, tratatul de analiză al prof. M. Nicolescu este unul dintre puținele în lume. Acest tratat îl conduce pe cititor pînă la stadiul actual al problemelor expuse, constituind astfel un mijloc puternic de inițiere în munca de cercetare în domeniul analizei matematice. În același timp, acest tratat expune unele contribuții de seamă ale școlii românești de analiză, contribuții pe care le așează la locul lor firesc, în cadrul celorlalte rezultate din domeniul respectiv de cercetare. Aceste contribuții românești sînt — de multe ori — rezultatul sugestiilor date chiar de către prof. M. Nicolescu și opera sa.

*

Sînt 27 de ani de cînd prof. Miron Nicolescu a preluat conducerea catedrei de analiză matematică (numită la început catedra de Calcul diferențial și integral) a Universității din București. Școala de analiză matematică pe care a format-o în acest timp este una din componentele cele mai valoroase ale matematicii românești. Profesori ca acad. Miron Nicolescu nu numai că ne-au învățat matematică, dar ne-au învățat cum să învățăm matematica; și nu numai cum s-o învățăm, dar și (în măsura în care aceasta se poate învăța) cum s-o facem, cum s-o dezvoltăm. Prin activitatea desfășurată în ultimele trei decenii și, în special, prin contactul direct, natural și omenesc, de fiecare zi, cu tinerii matematicieni, prof. Miron Nicolescu este unul din marii șefi de școală ai științei românești. Cu o înțelegere deplină a funcției sociale a matematicii, cu o dragoste de părinte pentru tinerele talente matematice, care au găsit în cadrul Institutului de matematică al Academiei un mediu optim de formare, prof. Miron Nicolescu a adus o contribuție esențială la consolidarea legăturilor dintre cercetarea fundamentală și cea aplicativă, dintre Universitate și Academie, dintre matematicienii români și cei din alte țări.

*

Să-mi fie îngăduit să aduc aici o mărturie personală. Sînt 30 de ani de cînd am urmărit, în amfiteatrul Spiru Haret al Universității din București, lecția de deschidere a cursului de analiză matematică a prof. Miron Nicolescu. Au fost suficiente doar cîteva prelegeri ale d-sale, pentru a-mi da seama ce bucurii spirituale mă așteptau dacă aveam curajul să rămîn mai departe student în matematici, specialitate care, în acel moment, nu oferea încă perspectiva unei profesii clare. Ca și mine, mulți alți colegi, din diferite generații, poartă amprenta cursurilor predate de către prof. Miron Nicolescu. Voi evoca aici, pentru ilustrare, un episod recent, deosebit de semnificativ.

Într-o seară din luna mai a anului 1973, Casa oamenilor de știință a Academiei a găzduit o întîlnire neobișnuită. O întreagă promoție de matematicieni se întîlneau cu profesorul lor de analiză matematică, pentru a marca 20 de ani de la absolvirea acestui curs. Nu erau absolvenții unei serii oarecare, cu procentajele obișnuite de studenți foarte buni, buni și mediocri; erau absolvenții unei „serii de aur”, care, sfidînd legile statistice, au devenit, aproape în totalitate, personalități de vază ale vieții noastre matematice. Nici cursul pe care-l sărbătoreau nu era un curs oarecare, ci unul care-și pusese pecetea pe întreaga lor evoluție ulterioară: cursul prof. Miron Nicolescu.

Ca fost conducător de seminar la acest curs, am avut privilegiul de a fi de față la întîlnire. Cordialitatea ei, maturitatea punctelor de vedere exprimate dădeau întreaga măsură a raporturilor adînc umane, de înaltă intelectualitate și de larg spirit cetățenesc pe care prof. Miron Nicolescu le întreține cu cei din jur.

*

Acad. Miron Nicolescu iese mereu în arena socială, spunîndu-și cuvîntul în probleme dintre cele mai complexe privind educația tineretului, organizarea științei și învățămîntului, evocînd figurile unor mari matematicieni români, ca acelea ale lui Pompeiu și Stoilow, dezbătînd probleme filozofice ale matematicii, adresîndu-se tineretului școlar sau studențesc în legătură cu probleme ca alegerea profesiei și frumusețea profesiei de matematician, evocîndu-și anii de școală și profesorii în anuarul liceului la care a învățat, pledînd convingător și cu pasiune pentru moderni-

zarea predării matematicii, atât în învățământul superior, cât și în cel mediu, spunându-și cuvântul în probleme legate de cultivarea limbii române, popularizând cu măiestrie unele fapte matematice importante, precum și unele domenii recente, legate de apariția mașinilor de calcul și a ciberneticii, împărtășindu-și impresiile din unele călătorii peste hotare, reacționând prompt la evenimentele politice interne și internaționale.

I-am urmărit, în ultimii ani, în coloanele revistelor „Argeș” și „Tribuna școlii”, adevărate miniaturi morale izvorâte dintr-o grijă deosebită față de ființele fragile. O pedagogie a atitudinilor delicate, o nevoie imperioasă de a proteja existențele tinere. O viziune simplă, dar robustă, rezultând dintr-o rectitudine morală și intelectuală.

*

Echilibrat și constant în relațiile umane; cu o aură de blîndețe și cu un calm generator de bună dispoziție, care dau oricărui interlocutor curajul de a i se destăinui; radiind bunătatea, căldura, generozitatea și seninătatea pe care numai oamenii cu conștiința împăcată a rectitudinii lor în viață le pot avea; ferm ori de cîte ori este necesar; lipsit de discontinuitățile și capriciile care innouează contactele între oameni, prof. Miron Nicolescu găsește o adevărată satisfacție în posibilitatea de a-și ajuta colaboratorii, totdeauna cu o deosebită discreție. „Pînă la proba contrarie, pentru mine orice om este bun și îi acord încredere”, mi-a spus cîndva. Niciodată nu impune, dar totdeauna se impune. Întreaga alcătuire umană a prof. Miron Nicolescu amintește de o replică pe care Shakespeare o pune în gura unui personaj al său: „Adevărul are o inimă liniștită” (*Truth has a quiet breast*).

„De la toți am învățat” — spune undeva prof. Miron Nicolescu. „Mă surprind uneori vorbind olimpiu ca Pompeiu, apăsător ca Țițeica, senin și simplu ca David Emmanuel. Căci noi nu sîntem numai fiii părinților noștri, ci și fiii profesorilor noștri”. Să ne fie îngăduit să-l parafrazăm și să mărturisim aici că am învățat de la d-sa și profesiunea de matematician și pe aceea mai nobilă de om și că ne surprindem mereu urmăriți de ambiția de a merge pe căile nobile pe care ni le arată.

STADIILE DE DEZVOLTARE A TEORIEI FUNCȚIILOR REALE ÎN ROMÂNIA

După cum se știe, teoria funcțiilor reale s-a născut la sfârșitul secolului trecut, ca o consecință directă a dezvoltării teoriei mulțimilor și a rafinării problemelor și rezultatelor în câteva compartimente ale analizei matematice, cum ar fi teoria integrării și teoria seriilor trigonometrice. Dezvoltarea acestei teorii la noi în țară urmează pas cu pas dezvoltarea ei pe plan mondial și își găsește explicația atât în condițiile generale de dezvoltare a matematicii românești, cât și în situația teoriei funcțiilor reale în țările europene cu care noi am avut legături științifice mai strânse. Vom distinge în dezvoltarea acestui domeniu în țara noastră cinci perioade, care corespund dealtfel și dezvoltării ei pe plan mondial.

O primă perioadă se referă la primele două decenii ale secolului nostru. Este perioada în care se pun bazele acestei teorii, în special în Franța (prin Borel, Lebesgue, Baire și Denjoy), în Italia, în Anglia, în Germania, în Polonia (prin Sierpiński și primii săi elevi) și în Rusia (prin Egorov și Luzin). Această perioadă își găsește la noi în țară un singur reprezentant, dar de prima mărime: Dimitrie Pompeiu. Importanța și fecunditatea ideilor sale pot fi măsurate abia acum, când ecoul lor, departe de a se stinge, câștigă în amploare. În cartea lui Thomas Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development* (Teoria integralei Lebesgue. Originea și dezvoltarea ei), publicată în 1970 de către editura americană The University of Wisconsin Press (Madison, Milwaukee), Dimitrie Pompeiu este citat sub titlul semnificativ *Pioneering Applications of the Lebesgue integral* (Aplicații de pionierat ale integralei Lebesgue), recunoscându-i-se astfel meritul de a fi unul dintre primii matematicieni care a utilizat integrala Lebesgue ca instrument de cercetare. Pompeiu este citat în numeroase monografii, ca aceea a lui E. F. Col-

lingwood și A. J. Lohwater *The theory of cluster sets* (Cambridge at the University Press, 1966), iar studiul funcțiilor lui Pompeiu a cunoscut în ultimele decenii o deosebită intensitate, Gustave Choquet utilizându-le, de o manieră implicită, în teza sa, pentru a arăta că orice funcție de prima clasă Baire, cu proprietatea lui Darboux, este transformata topologică a unei funcții derivate. Ceea ce este remarcabil în opera lui Pompeiu este faptul că, într-o perioadă în care teoria funcțiilor reale abia se năște, a întrevăzut probleme al căror interes avea să persiste pînă azi și care aveau să-și găsească o tehnică corespunzătoare de rezolvare abia cu cîteva zeci de ani mai tîrziu.

O a doua perioadă de dezvoltare a teoriei funcțiilor reale cuprinde cel de-al treilea deceniu al secolului nostru și se referă la rezultatele lui Simion Stoilow și cele ale lui Florin Vasilescu. Este perioada în care, după cristalizarea conceptelor de bază, legate de punctul de vedere descriptiv al unor Baire și Sierpiński și punctul de vedere metric al lui Borel și Lebesgue, teoria funcțiilor reale se afla în procesul de elaborare a teoremelor ei fundamentale. Într-un astfel de moment, Simion Stoilow aduce un punct de vedere nou în acest domeniu. După cum se știe, una din ideile mari și fecunde introduse în teoria funcțiilor reale a fost aceea a mulțimilor excepționale din punctul de vedere al măsurii (Lebesgue) sau al categoriei (Baire). Este de observat însă că, în toate rezultatele obținute de Lebesgue, Baire și Denjoy, mulțimea excepțională este situată în spațiul de definiție a aplicațiilor considerate. Stoilow obține, pentru prima oară în acest domeniu, teoreme de mare anvergură în care mulțimea excepțională, de măsură nulă, este situată nu în spațiul de definiție, ci în spațiul valorilor funcției. Stoilow a arătat că dintr-o teoremă a sa se poate deduce teorema clasică a lui Denjoy asupra numerelor derivate ale unei funcții continue. O seamă de rezultate ulterioare teoremei lui Stoilow, rezultate astăzi clasice, datorite unor matematicieni de seamă ca Banach și Saks, sînt consecințe ale teoremelor lui Stoilow, însă din păcate acest lucru a fost observat abia în 1958. Dacă faptele acestea ar fi fost semnalate la timp și dacă s-ar fi întrevăzut fecunditatea problemelor și ideilor lui Pompeiu, matematica românească ar fi căpătat un loc de frunte în istoria dezvoltării teoriei funcțiilor reale, un loc comparabil cu

cel ocupat de Polonia sau de Rusia. Ne întărim această opinie prin faptul că și celălalt reprezentant român din deceniul al treilea în teoria funcțiilor reale, Florin Vasilescu, a reușit să atragă atenția lumii prin câteva idei originale relative la teoria funcțiilor multiforme, legate de preocupările sale de teoria potențialului. Lebesgue și Luzin, cunoscuți prin zgîrcenia cu care citează alți autori, menționează numele lui Florin Vasilescu în monografii de multă vreme clasice. Avem în vedere monografia lui Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, și pe aceea a lui Luzin, *Leçons sur les ensembles analytiques et projectifs*.

O a treia perioadă de dezvoltare se referă la deceniile al patrulea și al cincilea ale secolului nostru și cuprinde în special cercetările profesorilor Nicolae Ciorănescu, Alexandru Froda, Gabriel Sudan, Miron Nicolescu, Tiberiu Popoviciu. Este perioada în care se cristalizează un specific al dezvoltării românești în acest domeniu și în care se dezvoltă unele preocupări care aveau să facă școală în matematica românească. Avem în vedere în primul rând preocupările de analiză hiperbolică ale prof. Miron Nicolescu și cele de teoria funcțiilor convexe ale profesorului Tiberiu Popoviciu. Deceniul al patrulea cunoaște, sub influența relațiilor noastre din ce în ce mai strînse cu matematicieni francezi și cu cei polonezi, unele preocupări interesante de teoria mulțimilor, în special teoria cardinalelor și ordinalelor transfinite, în lucrările profesorilor Gabriel Sudan și Alexandru Froda. În ordinea de idei dezvoltate de Denjoy, Young, Blumberg și Luzin, prof. Alex. Froda realizează o privire sistematică asupra distribuției proprietăților locale ale unei funcții reale și obține, între altele, rezultatul, astăzi clasic, care afirmă că mulțimea punctelor de discontinuitate de prima specie ale unei funcții reale arbitrare de o variabilă reală este cel mult numărabilă; ceea ce se știa pînă atunci era doar faptul că, dacă o funcție nu are puncte de discontinuitate de a doua specie, atunci cele de prima specie formează o mulțime numărabilă.

Profesorul Miron Nicolescu a dezvoltat, de-a lungul a cîtorva zeci de ani, o concepție de o perfectă rotunjime și unitate, privind trei tipuri de analiticitate a funcțiilor reale: hiperbolică, parabolică și eliptică, concepție sintetizată mai tîrziu în noțiunea generală de analiticitate în

raport cu un operator diferențial liniar. În ordinea de idei a analiticității hiperbolice se situează și unele cercetări ale lui Nicolae Ciorănescu. Deceniul al patrulea cunoaște, în lume, o perfecționare a tehnicilor de lucru în teoria funcțiilor reale, trecerea de la elaborarea unor concepții la construirea tehnică și perfecționarea instrumentelor de investigație. Încă în 1932, prof. Miron Nicolescu face racordul între teoria clasică a integralei Riemann și conceptele topologice și relative la teoria măsurii, la ordinea de zi în acel moment. Se știe că lungimea, aria, volumul, în sensul matematicii elementare, nu sînt măsuri, în sensul teoriei moderne a măsurii. Era deci necesar să se precizeze statutul integralei clasice ca integrală în raport cu o măsură. Teoria măsurii a făcut obiectul a numeroase cercetări în matematica românească, mai cu seamă sub forma ei abstractă.

O altă direcție de cercetare este inițiată, în această perioadă la Cluj-Napoca, de către prof. Tiberiu Popoviciu, prin elaborarea teoriei convexității de ordin superior. Această concepție a fost expusă de către autorul ei într-o monografie astăzi clasică, *Les fonctions convexes*, apărută în 1944 la Paris, în colecția *Actualités scientifiques et industrielles*.

Perioada a patra de dezvoltare a teoriei funcțiilor reale în țara noastră, perioadă care se extinde de-a lungul deceniilor al șaselea și al șaptelea ale secolului nostru, este perioada în care, sub influența prosperității generale a școlii matematice românești, stimulate de noile condiții de dezvoltare a patriei noastre, un număr mare de matematicieni români participă la faza de acuratețe pe care teoria funcțiilor reale a trăit-o și o trăiește încă pe plan mondial. Este perioada în care direcțiile și conceptele de bază ale acestei teorii sînt deja elaborate, dar rămîn numeroase probleme de finisare a unor detalii, de înlăturare a unor lacune, perioada în care această teorie își cere ultimele linii de pensulă, pentru a o transforma într-o teorie nu numai utilă, dar și frumoasă. Un număr mare de matematicieni români participă la acest proces, unii sporadic: Al. Climescu la Iași, I. Barbălat, C. Foaș, N. Boboc și alții la București. Dealtfel, încă înainte de război se observă această participare sporadică, dar interesantă, a unor matematicieni ca profesorii O. Onicescu și Gh. Mihoc. Dar apar și numeroase preocupări sistematice. Menționăm în primul rînd deosebit de bogata preocupare pentru analiza

hiperbolică, preocupare născută la noi din cercetările prof. Miron Nicolescu. Rezultatele în această privință sînt obținute de prof. Eugen Dobrescu și colaboratorii săi (Ion Sălăgean, Gh. Mosca, Aurora Sălăgean), de profesorii L. J. Nicolescu, Dragoș Vaida și Solomon Marcus. O altă direcție bogat reprezentată este aceea inițiată la Cluj-Napoca de prof. T. Popoviciu în domeniul convexității, al interpolării, al teoremelor de medie și al celei mai bune aproximări, direcție reprezentată de profesorii Elena Moldovan, Oleg Aramă, Dumitru Ripianu, Ivan Singer, Dimitrie D. Stancu și alții. Această perioadă este caracterizată prin generalizarea metodelor topologice și ansambliste în teoria funcțiilor reale și prin reluarea, la nivelul matematicii moderne, a unor preocupări ale clasicilor matematicii românești. Avem în vedere reconsiderarea, cu larg ecou în lume, a rezultatelor lui Dimitrie Pompeiu de către Solomon Marcus, a rezultatelor lui Stoilow de către Solomon Marcus și Marius Iosifescu, a rezultatelor lui Florin Vasilescu de către Ionel Tevy și Cristian Bruteanu, a rezultatelor prof. Miron Nicolescu de către profesorii N. Dinculeanu, C. Foiaș, S. Marcus, I. Singer și alții. Preocupări de mai mică amploare, relative la serii trigonometrice, fac obiectul cercetărilor prof. Marcel Roșculeț (la București) și prof. Marcel Rădulescu (la Cluj-Napoca). Pe linia de preocupări a matematicii poloneze, Solomon Marcus dezvoltă studiul unor clase de funcții discontinue și al proprietăților patologice din punctul de vedere al măsurii sau al categoriei.

Importante contribuții relative la teoremele de medie au fost obținute de prof. Miron Nicolescu și de Nicolae Ciorănescu, pe linia unei tradiții care urcă la Dimitrie Pompeiu. Recent, unele contribuții relative la teoremele de medie au fost obținute de prof. Olga Costinescu (la Iași). O deosebită însemnătate o prezintă, în această perioadă, tratatele, manualele și monografiile de teoria funcțiilor reale și teoria măsurii, care apar în țara noastră și care au imprimat un progres esențial învățămîntului și formării de cercetători în domeniul analizei matematice. Menționăm în primul rînd tratatul de analiză matematică, în trei volume, al prof. Miron Nicolescu, tratat aproape unic în lume prin modul în care îmbină spiritul teoriei clasice a funcțiilor reale cu cel al analizei funcționale și topologiei generale. Menționăm de asemenea monografiile privind teoria măsurii ale prof. N. Dinculeanu și cea privind funcțiile aproape

periodice, a prof. C. Corduneanu, traduse peste hotare în limba engleză.

A cincea perioadă de dezvoltare a teoriei funcțiilor reale este perioada pe care această disciplină o trăiește în momentul de față în lume. Caracteristic ei este faptul că accentul nu mai cade pe problemele care vin din interiorul acestei teorii, construcție esențialmente terminată, ci din alte domenii ale matematicii, cum ar fi analiza numerică, analiza funcțională, ecuații diferențiale, teoria distribuțiilor, cercetarea operațională, fizica matematică. Încă Denjoy prevăzuse că concepția discontinuă a materiei, care stă la baza fizicii moderne, cere înlocuirea derivatei ordinare prin derivata aproximativă și, în general, a proprietăților care au loc peste tot prin cele care au loc în afara unei mulțimi excepționale.

Dintre cercetările din această a cincea etapă, aș dori să menționez aici un exemplu care mi se pare simptomatic pentru semnificațiile nebănuite ale teoriei funcțiilor reale. Bernard Bereanu, în preocupările sale de cercetare operațională, a utilizat numeroase rezultate din teoria funcțiilor convexe Jensen și a pus probleme noi, interesante, de teoria funcțiilor reale. Explicația intervenției teoriei funcțiilor convexe în problemele de programare se explică prin aceea că convexitatea discretă nu poate fi bine înțeleasă fără prelungirea, scufundarea ei în fenomenul de convexitate definit pe o mulțime continuă.

Dezvoltarea teoriei funcțiilor reale în ultimele două decenii și, în particular, dezvoltarea ei la noi în țară, își așteaptă încă monografiile care s-o sistematizeze și s-o sintetizeze.

Timp de mai multe decenii, Dimitrie Pompeiu a dominat viața matematică românească. Eram student când l-am cunoscut, în ultimii ani ai vieții sale. Mi-aduc aminte de o zi prin 1946 sau 1947, când cu prilejul vizitei, la Universitatea din București, a unor distinși matematicieni francezi, a rostit câteva cuvinte, la o solemnitate organizată în amfiteatrul Spiru Haret. Doar câteva cuvinte, dar a fost de ajuns pentru a sesiza fibra de artist a acestui savant. Discursul său era ca un cântec, trădând un simț acut al proprietății termenilor și o vocație a vorbirii frumoase. Există astăzi mai multe mărturii despre afinitatea sa pentru poezie. Voi relata doar una dintre acestea.

În cartea *Bacovia. Viața poetului*, publicată în Editura pentru literatură în 1962 și având ca autor pe Agatha Grigorescu-Bacovia, este evocată o întâlnire a lui Dimitrie Pompeiu cu marele poet moldovean, în februarie 1930, cu prilejul unei șezători literare care a avut loc în sala Teatrului Mic din București. Bacovia a citit *Lacustră*, *Pantofii* și alte poezii. În sală se afla și Dimitrie Pompeiu care, la sfârșit, a pătruns în culise, felicitându-l foarte călduros pe poet. Iată dialogul care a avut loc (loc. cit., p.221):

„— Știți cu cine am studiat poeziile dumneavoastră? îl întrebă Pompeiu. Cu Bogdan-Duică de la Cluj; un an întreg a studiat opera dumneavoastră cu studenții și așa m-am edificat și eu asupra frumoasei dumneavoastră creații. Poetul îl privi cu acel zîmbet rar, de sărbătoare, când era mulțumit de ceva.

— Dumneavoastră sînteți profesor de matematică? — îl întrebă la rîndul său poetul.

— Da, dar matematica iubește și înțelege poezia ...

— Poezia nu prea iubește matematica și nu prea o înțelege, glumi Bacovia. Vă mulțumesc pentru atenție”.

L-am mai văzut pe Pompeiu în jurul anilor 1950, condus la braț, pe culoarul Facultății de matematică și fizică, de către prof. Miron Nicolescu. Cu fruntea grea de gânduri, părăsit de puteri, avea nevoie de un sprijin pentru a se putea deplasa. Această imagine are azi pentru mine o valoare simbolică. Erau atunci, alături, după cum aveam să-mi dau seama mai târziu, doi mari maestri ai mei, care m-au călăuzit în etapele esențiale ale formării mele științifice, Pompeiu prin intermediul operei sale matematice, iar prof. Miron Nicolescu atît prin operă, cît și direct, de-a lungul multor ani de cînd am privilegiul de a-i fi colaborator. Dar nu este vorba numai de atît. Era atîta gingășie și dragoste în modul în care Pompeiu era protejat de către elevul său, încît pentru mine această imagine semnifica o adevărată transmitere de ștafetă din partea unei generații către generația următoare, aceasta din urma trăind cu intensitate imensa recunoștință pe care i-o datorează.

L-am văzut apoi, pentru ultima oară, în aula Academiei, în toamna lui 1953, cînd împlinea 80 de ani. Era dărîmat. Abia a mai putut rosti, cu glasul tremurat și sugrumat de emoție, cîteva cuvinte. Privindu-i azi atîtea fotografii care îl arată înalt, frumos și plin de putere, ascultînd relatările colaboratorilor săi, despre farmecul și volubilitatea persoanei sale, îmi amintesc cu un fior de acel trup chircit care în 1953 se zbătea să supraviețuiască. A supraviețuit opera sa, a cărei perenitate — o putem spune azi cu mai multe argumente decît în urmă cu 20 de ani, cînd a murit — este asigurată.

*

Valoarea unei opere științifice se judecă după influența pe care ea o exercită asupra evoluției științei. Desigur că pot să apară, în acest proces, unele discontinuități. Un rezultat important poate să rămîna un timp neobservat sau neutilizat, după cum o operă modestă poate să apară pentru moment importantă. Mai există în știință și drumuri care se înfundă, rîuri care în loc să se verse în fluvii și, prin acestea, în mări și oceane, eşuează într-un mic lac sau pur și simplu într-o băltoacă.

În aceste condiții, este greu uneori de diagnosticat importanța unui rezultat matematic chiar atunci cînd el

apare sau în perioada imediat următoare. Multe elemente afective, de conjunctură, pot să-i diminueze sau să-i îngroașe în mod artificial semnificația. Dar atunci când de la apariția lui au trecut multe zeci de ani, atunci când relațiile personale pe care un savant le-a întreținut cu ceilalți savanți nu-și mai pot face efectul, iar amicitțiile și adversitățile s-au stins deopotrivă, o judecată din ce în ce mai dreaptă își face loc.

Ne propunem să urmărim, tocmai din perspectiva înrîurii pe care a exercitat-o asupra dezvoltării matematicii, călătoria în timp a unui singur rezultat obținut de către Pompeiu. Am fi putut alege, în acest scop, noțiunea de distanță între două mulțimi închise care, după o lungă odisee în domeniul topologiei, consemnată deja în tratate clasice (a se vedea, de exemplu, primul volum, p.106 din tratatul de topologie al lui C. Kuratowski, apărut în 1948) a devenit, încă în urmă cu vreo zece ani, printr-o lucrare a matematicienilor polonezi E. Marczewski și H. Steinhaus (publicată în „Colloquium Mathematicum”), un instrument de investigație în biologie, iar recent un student, C. Calude, i-a găsit o aplicație în teoria limbajelor formale. Am fi putut alege micile bijuterii pe care le reprezintă contribuțiile lui Pompeiu relative la teorema creșterilor finite, pe care a extins-o, căreia i-a căutat analogul în domeniul variabilei complexe și i-a studiat reciproca și am fi constatat astfel impactul acestor contribuții asupra teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale. (Actele celei de-a treia Conferințe de oscilații neliniare, care a avut loc la Berlin în 1964, sînt revelatoare în acest sens.) Ne-am oprit însă atenția asupra unui alt rezultat, alegerea fiind justificată de considerente personale. Este vorba de o teoremă care, prin frământările pe care mi le-a provocat, în mai multe momente ale activității mele în domeniul analizei matematice, prin imensa curiozitate pe care mi-a stîrnit-o, a intrat, aș putea spune, în propria mea biografie. Avem în vedere construcția unor funcții derivabile, a căror derivată admite o mulțime frontieră peste tot densă de zerouri.

În unele prezentări ale operei lui Pompeiu, această contribuție este considerată doar în treacăt, ca un rezultat periferic față de obiectivele majore ale acestei opere. Poate că, în intenția lui Pompeiu, așa s-au și petrecut lucrurile. Dar optica noastră actuală este datoră să înregistreze judecata unei istorii de aproape 70 de ani, deoarece o mare

parte din noțiunile și rezultatele datorite lui Pompeiu datează încă din primul deceniu al secolului nostru. După cum va rezulta, sperăm, din cele ce urmează, această istorie situează construcția menționată printre contribuțiile de prim rang ale operei lui Pompeiu.

*

Să pornim deci la drum.

În teza sa, în momentul în care își propune să arate că o funcție analitică uniformă, având drept mulțime a singularităților o mulțime P liniară, perfectă și rară, de măsură nenulă, poate fi mărginită în vecinătatea singularităților sale, Pompeiu observă că pentru construirea unei astfel de funcții are nevoie de o anumită funcție de o variabilă reală definită pe intervalul (α, β) , unde α și β sînt extremitățile mulțimii P . „Se știe — spune Pompeiu, că există funcții derivate mărginite care se anulează în orice interval: le voi numi funcțiile lui Köpcke, pentru că Köpcke este cel care, primul, a construit astfel de funcții”. Să adăugăm observația că funcțiile lui Köpcke schimbă semnul în orice interval.

Să-l urmărim mai departe pe Pompeiu (vezi D. Pompeiu, *Opera matematică*, Ed. Academiei, 1959, pp.44 — 45):

„Consider o funcție a lui Köpcke cu următoarele proprietăți: 1°. Este nulă în toate punctele α_n, β_n extremități ale intervalelor contigue cu P și în orice interval contiguu cu P ; 2°. Este nulă în extremitățile α, β al lui P . Fie $g(t)$ o astfel de funcție. Să formăm integrala

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(t)}{t - z} dt.$$

Afirm că funcția $h(z)$ este mărginită în tot planul”.

A. Köpcke publicase într-adevăr între anii 1887 și 1899 patru memorii în „Mathematische Annalen”, în care își propunea să construiască funcții derivabile în orice punct, oscilînd în orice interval. La capătul unui efort concretizat în 57 de pagini, Köpcke obține această construcție, nu înainte de a fi comis unele erori, pe care însă tot el le-a îndepărtat. Concomitent, J. Pereno în 1897 și, ulterior, T. Brodén în 1900, referindu-se la diferite moduri

de condensare a unor singularități cu ajutorul seriilor, obțin de asemenea funcții derivabile, care oscilează în orice interval.

Examinînd construcția lui Pompeiu, am constatat totuși că funcția pe care el o atribuie lui Köpcke și pe care o desemnează cu $g(t)$ nu oscilează în orice interval, fiind în unele intervale identic nulă. Astfel, la un moment dat (a se vedea D. Pompeiu, *Opera matematică*, p.47), pentru a se studia comportarea lui $h(z)$ în vecinătatea extremităților α și β ale lui P , se consideră două numere $a = \alpha - h$, $b = \beta + h$ ($h > 0$) și se convine ca în intervalele $(a, \alpha - h)$ și $(\beta + h, b)$ funcția $g(t)$ să fie nulă.

În fapt, Pompeiu s-a folosit de o funcție derivată mărginită, luînd valori diferite de zero pe o mulțime liniară perfectă, rară, de măsură pozitivă și anulîndu-se pe o mulțime peste tot densă. Existența unei astfel de funcții nu poate fi pusă la îndoială. Am găsit-o atestată într-un articol clasic al lui Arnaud Denjoy, publicat în 1915 în „Bulletin de la Société mathématique de France”. În acest articol, Denjoy arată, loc. cit, pp.237—248, că există o mulțime P perfectă, rară, de măsură pozitivă, pentru care se poate defini o funcție derivată nulă în orice punct din afara lui P și luînd, pe P , atît valori negative, cît și valori pozitive, în vecinătatea oricărui punct din P .

Pompeiu a avut intuiția unei astfel de derivate și i-a atribuit-o lui Köpcke. Ulterior, în 1906, într-un articol despre teorema creșterilor finite și, mai cu seamă, în 1907, într-un articol publicat în „Mathematische Annalen”, jenat probabil de caracterul deosebit de greoi al exemplului lui Köpcke, Pompeiu construiește, printr-o metodă proprie, o clasă de funcții continue, strict crescătoare, derivabile, cu derivată mărginită, astfel încît zerourile derivatei formează o mulțime densă a cărei complementară este de asemenea densă. Astfel de funcții sînt obținute ca inverse ale funcțiilor de forma

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x - a_n)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

unde $A_n > 0$ pentru $n = 1, 2, \dots$, seriile $\sum A_n$ și $\sum \sqrt{A_n}$ sînt convergente, iar mulțimea $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ este peste tot densă în intervalul de definiție al lui F .

Eleganța și simplitatea construcției lui Pompeiu contrastează cu prolixitatea construcției lui Köpcke. Funcțiile construite de Pompeiu sînt strict crescătoare, fapt care le distinge de toate celelalte exemple de funcții ale căror derivate admit o mulțime frontieră peste tot densă de zerouri. Avem în vedere nu numai exemplele deja menționate, datorite lui Köpcke, Pereno, Brodén și Schoenflies, dar și cele ulterioare, date, pe căi laborioase, de către A. Denjoy în 1915 (pp.211—237 din articolul citat), S. Mazurkiewicz în 1916, 1917 și 1918, Z. Zalcwasser în 1929 și altele. Faptul acesta nu putea să nu atragă atenția. Contrastul dintre monotonia și derivabilitatea funcției construite de Pompeiu, pe de o parte, și natura neobișnuită a mulțimii zerourilor, pe de altă parte, era frapant în acea vreme, în care se cunoșteau încă destul de puține fenomene patologice în teoria funcțiilor reale. Marele tratat de analiză al lui E. W. Hobson, apărut în 1907 la Cambridge, ca și cel al lui J. Pierpont, apărut în 1911 la Londra, tratate care-și devansau epoca prin spiritul lor deosebit de modern pentru acel moment (învățămîntul analizei avea să fie încă multă vreme dominat de tratate de tipul celui datorit lui E. Goursat), consemnează pe cîteva pagini funcțiile în discuție, numindu-le funcțiile lui Pompeiu.

*

După cum am văzut, derivata $g(t)$ de care Pompeiu avea nevoie apare, în teza sa, sub semnul unei integrale Lebesgue. Aceasta se întîmplă într-un moment în care teoria lui Lebesgue abia apăruse. Dealtfel, întreaga teză a lui Pompeiu este impregnată de spiritul nou al ideilor de măsură și integrală Lebesgue, pe care le promova începutul secolului nostru. Era o întreprindere deosebit de delicată, deoarece lipseau încă marile teoreme care aveau, ulterior, să transforme teoria măsurii și integralei Lebesgue într-un instrument comod, suplu. Astfel, la un moment dat, Pompeiu are nevoie să arate că dacă derivata $g(t)$ despre care a fost vorba mai sus este diferită de zero într-un punct, atunci mulțimea punctelor în care ea este diferită de zero este de măsură pozitivă. Cu 11 ani mai tîrziu, acest fapt devenea o consecință a unei teoreme publicate de Denjoy în „Enseignement mathématique” (Dacă f este o derivată finită

a unei funcții continue, atunci mulțimea $\{x; a < f'(x) < b\}$ este de măsură pozitivă ori de câte ori este nevidă). În absența acestei teoreme, Pompeiu reușește totuși să discearnă, în textele încă crude ale lui Lebesgue, argumentele necesare pentru a obține rezultatul de care avea nevoie. Faptul de a fi reușit să găsească într-o teorie abia apărută, ca aceea a lui Lebesgue, instrumentele necesare unei investigații atât de fine ca aceea privind comportarea unei funcții analitice în vecinătatea singularităților sale (să observăm că Pompeiu reușește să arate că nu natura topologică a mulțimii de singularități, ci natura ei metrică, mai precis întinderea ei — liniară sau superficială — este aceea care decide această comportare) și-a primit, la o distanță în timp de aproape 70 de ani, o replică meritată.

*

Evident, Pompeiu nu a putut suplini printr-un demers propriu toate acele mari teoreme legate de măsura și integrala Lebesgue, care aveau să vină abia în deceniile următoare. În particular, Pompeiu nu a putut beneficia, în primul deceniu al secolului nostru, de o teoremă ca aceea a lui Luzin, care avea să vină abia în al doilea deceniu și din care rezulta că mulțimea valorilor luate de o funcție în punctele în care derivata ei există și este nulă este totdeauna de măsură nulă. A trebuit de aceea să facă un lung ocol, recurgînd la o teoremă a lui Borel, pentru a stabili convergența aproape peste tot a seriei

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} \quad (2)$$

formate cu derivatele termenilor seriei (1). Însă teorema în cauză a lui Borel cere convergența seriei formate cu rădăcinile pătrate ale coeficienților A_n .

În 1954 am observat că această ipoteză este inutilă și că întreaga construcție a derivatelor lui Pompeiu — și așa simplă și elegantă — poate fi și mai mult simplificată („Studii și cercetări matematice”, 1954). Studiul metric al mulțimii punctelor de convergență ale seriei (2) s-a dovedit inutil pentru stabilirea proprietăților funcției $G(t)$, inversa lui $F(x)$. Dealtfel, convergența aproape peste

tot a seriei (2) poate fi stabilită independent de teorema lui Borel (teoremă care afirmă că dacă seria $\sum \sqrt{A_n}$ este convergentă, atunci seria

$$\sum \frac{A_n}{|x - a_n|}$$

este convergentă aproape peste tot).

*

Marile rezultate științifice se caracterizează, între altele, prin faptul că, pe lângă eficacitatea lor în problema care le-a provocat, ele își dezvăluie mereu noi și noi implicații, mult dincolo de ceea ce însuși autorul lor ar fi putut bănuî. Funcțiile lui Pompeiu își arătaseră eficiența în rezolvarea problemei pe care Pompeiu și-o propusese în teză. „Maurul și-a făcut datoria și poate să plece” ar fi putut spune unii. Dar funcțiile lui Pompeiu au rămas în continuare pe scena matematicii, ele abia urmau să-și dezvăluie noi și noi semnificații, întocmai ca marile opere literare, pe care fiecare nouă generație le îmbogățește cu o nouă lectură. Funcțiile lui Pompeiu aveau să înceapă o lungă peregrinare prin cele mai variate domenii ale analizei și topologiei, peregrinare care nu este încheiată nici astăzi.

*

Topologia generală a găsit în structura graficelor derivate-lor lui Pompeiu o sursă sistematică de producere a unor situații care contrazic intuiția comună.

B. Knaster și C. Kuratowski au arătat încă în 1925 că problema construirii unei mulțimi G biconexă (o mulțime este biconexă dacă este conexă, dar nu se poate descompune în două mulțimi conexe și disjuncte) este rezolvată dacă se construiește o funcție derivată mărginită în $[0,1]$, anulându-se în orice interval și nefiind constantă în nici un interval. Ei au atras atenția asupra faptului că derivatele lui Pompeiu îndeplinesc toate aceste condiții. Mai târziu, în 1952, astfel de contraexemple din domeniul topologiei generale aveau să fie inventariate în volumul al doilea al tratatului de topologie al lui C. Kuratowski. Aici se arată (pp.95—96) că, folosindu-se graficul unei derivate a lui Pompeiu, se poate da un exemplu de spațiu

topologic dispersat (cu alte cuvinte, care nu conține nici o submulțime conexă care nu se reduce la un punct) și care nu este nicăieri conex (un spațiu topologic este nicăieri conex dacă fiecărei perechi de puncte a și b din spațiu îi corespunde o mulțime în același timp închisă și deschisă, care conține pe a , dar nu conține pe b). Tot Kuratowski a arătat (loc. cit., p. 130) că graficul unei derivate a lui Pompeiu constituie un exemplu de spațiu complet, separabil, conex și punctiform (un spațiu topologic este punctiform dacă nu conține nici un continuu care nu se reduce la un punct).

*

În toate aceste aplicații topologice, referința la derivatele lui Pompeiu este datorită simplității lor; însă aceleași proprietăți se pot obține cu ajutorul oricăror derivate ale căror zerouri formează o mulțime densă împreună cu complementara ei. Originalitatea derivatelor lui Pompeiu constă nu numai în simplitatea lor, în caracterul lor elementar, dar și în faptul că ele păstrează un semn constant. O clasă similară de derivate a fost studiată de către Z. Zahorski în 1937; este vorba de clasa derivatelor finite, admițând o mulțime densă de intervale în care sînt identic nule („Comptes rendus de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie”). Ele se deosebesc deci de derivatele lui Pompeiu prin faptul că complementara mulțimii de zerouri este rară, în timp ce, la derivatele lui Pompeiu, ea este densă. Această particularitate a derivatelor lui Pompeiu are o semnificație interesantă în problema integrabilității. Se știe, încă din 1881, dintr-un exemplu dat de V. Volterra, că există derivate mărginite neintegrabile Riemann (acest exemplu este consemnat în volumul al doilea de analiză matematică al prof. Miron Nicolescu, publicat în 1953 în Ed. Academiei). Însă, în exemplul lui Volterra, orice interval conține un subinterval în care derivata este integrabilă Riemann. Derivatele lui Pompeiu au proprietatea remarcabilă de a nu fi integrabile Riemann pe nici un interval. Într-adevăr, dacă o astfel de derivată — fie ea $G'(t)$ — ar fi integrabilă Riemann pe $[a, b]$, am avea

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t) dt$$

și, ținând seama de faptul că G este strict crescătoare pe $[a, b]$, rezultă

$$\int_a^b G'(t) dt > 0.$$

Pe de altă parte, din faptul că $G'(t)$ se anulează în orice interval, avem

$$\int_a^b G'(t) dt = 0$$

unde bara de sub semnul ultimei integrale arată că avem de-a face cu integrala Darboux inferioară. Am ajuns astfel la o contradicție: deci G' nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

Nici proprietatea de neintegrabilitate Riemann nu este specifică derivatelor lui Pompeiu. Ea apare și la derivatele de tipul lui Köpcke. Însă în timp ce neintegrabilitatea Riemann a derivatelor lui Pompeiu a putut fi stabilită pe o cale elementară, accesibilă începătorilor în ale analizei matematice, demonstrarea neintegrabilității Riemann a derivatelor lui Köpcke reclamă un instrument mai fin, accesibil numai celor avansați. Acest lucru este important din punct de vedere metodologic și pedagogic, atîta vreme cît este vorba de un fapt fundamental, pe care trebuie să-l cunoască masa studenților începători. În mod surprinzător, cele mai multe manuale de analiză matematică omit problema atît de naturală a raporturilor dintre cele două noțiuni care constituie temelia unui prim curs de analiză: derivata și integrala. Mai precis, se specifică raportul care există între clasa funcțiilor integrabile și clasa funcțiilor care admit primitivă, considerațiile oprindu-se la constatarea că intersecția celor două clase conține clasa funcțiilor continue.

Să vedem deci cum se stabilește neintegrabilitatea Riemann a derivatelor lui Köpcke. Este suficient să se observe că, în baza teoremei lui Denjoy relativă la mulțimile de forma $\{x; a < f'(x) < b\}$, teoremă pe care am amintit-o mai sus, mulțimea punctelor în care o derivată a lui Köpcke este diferită de zero este de măsură pozitivă. În același timp, orice punct în care o derivată a lui Köpcke este

diferită de zero este un punct de discontinuitate pentru această derivată, deoarece mulțimea zerourilor este peste tot densă (în baza proprietății lui Darboux a oricărei derivate). Rezultă că mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei derivate a lui Köpcke este de măsură pozitivă în orice interval, deci o astfel de derivată nu este integrabilă Riemann în nici un interval.

Observăm că a trebuit să folosim măsura Lebesgue și o teoremă fină a lui Denjoy, absentă din programa de analiză a oricărei universități, ca să nu mai punem la socoteală utilizarea teoremei lui Lebesgue de caracterizare a funcțiilor integrabile Riemann. Aceeași demonstrație ar fi fost valabilă și pentru stabilirea neintegrabilității Riemann a derivatelor lui Pompeiu; în acest caz, utilizarea ei nu s-ar fi justificat în nici un fel, atîta vreme cît dispunem de calea mai simplă și mai elementară indicată mai sus. Așa cum am arătat într-un articol menționat mai sus, publicat în 1954 în „Studii și cercetări matematice”, stabilirea faptului că inversa funcției (1) este derivabilă, cu derivată mărginită, iar zerourile derivatei formează o mulțime frontieră peste tot densă nu necesită nici o noțiune și nici un rezultat de teoria măsurii sau a integralei Lebesgue, totul reducîndu-se la un raționament elementar asupra seriei (1) și asupra seriei derivate. Totul pledează deci pentru introducerea funcțiilor lui Pompeiu în cursurile de analiză pentru studenții începători; nu doar pentru a venera memoria lui Pompeiu, ci în primul rînd pentru importanța semnificației și pentru avantajul metodologic pe care-l prezintă.

Ca derivate ale unor funcții crescătoare (deci cu variație mărginită), derivatele lui Pompeiu sînt totdeauna integrabile Lebesgue. Ele furnizează deci o întreagă clasă de derivate mărginite, integrabile Lebesgue, dar neintegrabile Riemann pe nici un interval. Un motiv în plus pentru includerea lor în manualele de analiză matematică. Ele oferă un răspuns complet la una dintre cele mai firești întrebări care se poate pune în cadrul unui prim curs de analiză: Pentru o funcție mărginită, este integrabilitatea Riemann o consecință a existenței primitivei și a integrabilității Lebesgue? După cum am văzut, derivatele lui Pompeiu dau un răspuns negativ la această întrebare.

Să observăm că, pentru a stabili integrabilitatea Lebesgue a derivatelor lui Pompeiu, nu ne-am folosit de mărginirea

acestor derivate, ci exclusiv de faptul că primitivele lor sînt cu variație mărginită. Această situație ne sugerează o generalizare a derivatelor lui Pompeiu. De aci înainte, vom folosi pentru derivatele lui Pompeiu denumirea de *derivate Pompeiu mărginite*, iar pentru derivatele care schimbă semnul în orice interval denumirea de *derivate oscilante*. Dacă înlocuim, în definiția derivatelor Pompeiu mărginite, condiția de mărginire prin condiția de finitudine, obținem noțiunea de *derivată Pompeiu finită*. În sfîrșit, putem considera și *derivate Pompeiu finite sau infinite*. Am întreprins în 1963 (într-un articol publicat în „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo”) un studiu amănunțit al tuturor acestor tipuri de derivate, precum și al unor generalizări ale lor. Este clar că derivatele Pompeiu finite sau infinite sînt integrabile Lebesgue, pentru același motiv pentru care derivatele Pompeiu mărginite sînt integrabile Lebesgue: primitivele lor sînt funcții crescătoare, deci cu variație mărginită. Se pune în mod natural întrebarea dacă și derivatele oscilante sînt totdeauna integrabile Lebesgue. Îi datorăm lui Andrew Bruckner răspunsul negativ la această întrebare. În 1965 (într-un articol publicat în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées”) el a dat un exemplu de derivată finită, a cărei mulțime de zerouri este densă împreună cu complementara ei, și care nu este integrabilă Lebesgue pe intervalul de definiție.

Un alt exemplu de derivată oscilantă finită, neintegrabilă Lebesgue, a fost dat de J. S. Lipiński, concomitent cu A. Bruckner (în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées”). Evident însă că, în calitatea ei de derivată finită, orice derivată oscilantă finită este integrabilă Perron.

În legătură cu deosebirea de structură între derivatele lui Pompeiu (mărginite, finite, finite sau infinite) și derivatele oscilante, faptul că primitivele derivatelor oscilante nu pot fi monotone în nici un interval poate fi precizat după cum urmează: Există derivate oscilante a căror primitivă este o funcție cu variație mărginită, după cum există derivate oscilante a căror primitivă nu este cu variație mărginită pe nici un interval. Un exemplu de derivată oscilantă a cărei primitivă este o funcție cu variație mărginită se obține prin considerarea unei funcții f aproximativ continue, mărginite pe $[0,1]$ și luînd în

orice subinterval din $[0,1]$ atît valori pozitive, cît și valori negative. În virtutea unor rezultate ale lui Denjoy din 1915 (loc. cit.), f este o derivată oscilantă pe $[0,1]$, iar primitiva ei este o funcție cu variație mărginită pe $[0,1]$.

Derivatele oscilante, a căror primitivă este o funcție cu variație mărginită, ocupă o poziție intermediară între clasa derivatelor lui Pompeiu și clasa derivatelor oscilante a căror primitivă nu este cu variație mărginită pe nici un interval. Ele merită să facă obiectul unui studiu sistematic, precizîndu-se asemănările și deosebirile dintre ele și derivatele lui Pompeiu.

*

O dată importantă în istoria derivatelor lui Pompeiu este anul 1947. Doi matematicieni, Gustave Choquet (în „Journal de mathématiques pures et appliquées”) și I. Maximov (în „Annali di Scuola normale super. di Pisa”), dau, independent unul de altul și pe căi diferite, o caracterizare a transformatelor topologice ale derivatelor: sînt funcțiile Darboux, de prima clasă Baire. Aceasta înseamnă că, fiind dată o funcție f Darboux, de prima clasă Baire pe $[a,b]$, există o funcție φ continuă și strict crescătoare pe $[a,b]$ și o funcție derivată g definită pe intervalul $[\varphi(a), \varphi(b)]$, astfel încît $f(x) = g(\varphi(x))$ pentru orice $x \in [a, b]$. Acest rezultat mi-a permis, în 1963 (loc. cit.), să obțin o caracterizare a transformatelor topologice ale derivatelor Pompeiu (mărginite, finite, finite sau infinite): sînt funcțiile (mărginite, finite respectiv finite sau infinite) de prima clasă Baire, avînd proprietatea lui Darboux și admițînd o mulțime frontieră peste tot densă de zerouri.

Lucrarea lui Choquet, de mari proporții (constituie chiar teza sa), utilizează în mod esențial derivatele lui Pompeiu, deși, în mod nedrept, nu face nici o referință explicită la ele. Este important faptul că, pentru a obține caracterizarea transformatelor topologice ale derivatelor, Choquet are nevoie de proprietatea de monotonie a primitivei; din lunga listă a celor care construiseră funcții cu derivată neconstantă pe nici un interval, care se anulează în orice interval, Pompeiu era singurul care satisfăcea această exigență. Mai mult decît atît; după cum am observat în 1963 (loc. cit.), din teoremele lui Choquet rezultă o

precizare esențială asupra tipului borelian al mulțimii de zerouri ale derivatelor sale. Astfel, unul din rezultatele lui Choquet afirmă că pentru orice mulțime E de tipul G_δ și de măsură nulă există o funcție F strict crescătoare și absolut continuă, avînd în fiecare punct o derivată unică, strict pozitivă, finită sau infinită, astfel încît $E = \{x; F'(x) = \infty\}$. Inversa funcției F este o funcție de tipul lui Pompeiu, cu singura deosebire că derivata ei nu este mărginită, ci doar finită. Zerourile derivatei Pompeiu astfel obținute formează o mulțime care constituie tocmai imaginea prin F a mulțimii E , deci o imagine topologică a unei mulțimi G_δ arbitrare, dar de măsură nulă.

În acest fel, studiul derivatelor lui Pompeiu începe să devină o componentă a problemei generale a structurii funcțiilor derivate, problemă dintre cele mai spinoase, nerezolvate complet nici pînă azi.

*

O etapă importantă o constituie, în această privință, apariția în 1950 a memoriului, astăzi clasic, al lui Z. Zahorski (în „Transactions of the American Mathematical Society”). Unul din rezultatele importante conținute în acest memoriu (teorema 8) dă o condiție necesară și suficientă ca o mulțime să fie mulțimea de zerouri ale unei derivate mărginite. Această condiție cere mulțimii să fie complementara unei mulțimi de clasă M_4 . O mulțime E este de clasă M_4 dacă există un șir de mulțimi închise $\{F_n\}$ și un șir de numere $\{\eta_n\}$, $0 < \eta_n < 1$, astfel încît

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

și pentru fiecare $x \in F_n$ și fiecare $c > 0$ există un număr $\varepsilon(x, c) > 0$ avînd următoarea proprietate: pentru toate valorile h și h_1 pentru care $hh_1 > 0$, $h/h_1 < c$, $|h + h_1| < \varepsilon(x, c)$ este satisfăcută inegalitatea

$$\frac{\mu(E \cap (x + h, x + h + h_1))}{|h_1|} > \eta_n,$$

unde prin μ am notat măsura Lebesgue. Se convine de asemenea că mulțimea vidă este și ea de clasă M_4 . După cum observă chiar Zahorski (loc. cit., p.43), condiția de

a fi complementara unei mulțimi de clasa M_4 , caracterizează și mulțimea zerourilor unei derivate Pompeiu mărginite, mărginirea derivatelor intervenind aici în mod esențial. Pentru derivatele Pompeiu finite, problema structurii mulțimii de zerouri este mult mai grea. Ea poate fi acum abordată cu succes, deoarece în 1970 (într-un articol al lui D. Preiss, publicat în „Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae”) a fost rezolvată problema caracterizării mulțimii de zerouri ale unei derivate finite, problemă lăsată fără răspuns de către Z. Zahorski. Însă condiția găsită de către D. Preiss ca fiind necesară și suficientă pentru ca o mulțime să fie mulțimea de zerouri ale unei derivate finite este atât de complicată, încât nu o putem reproduce aici. Să mai observăm că D. Preiss obține și o caracterizare a mulțimii de zerouri ale derivatei — finite sau infinite — ale unei funcții continue. Acest rezultat permite să se abordeze problema caracterizării mulțimii de zerouri ale unei derivate Pompeiu finite sau infinite. În orice caz, putem afirma, chiar ignorând rezultatele lui Preiss, că mulțimea de zerouri ale unei derivate Pompeiu finite sau infinite nu este totdeauna de tipul borelian G_δ . Într-adevăr, cu ajutorul unui rezultat din 1956 al lui V. M. Tzodyks și E. M. Landis (publicat în „Doklady Akademii Nauk S.S.S.R.”) am demonstrat în 1963 (loc. cit., pp.5—6) existența unei derivate Pompeiu finite sau infinite, ale cărei mulțimi de zerouri este de prima categorie Baire, dar nu este de tipul G_δ . Pe de altă parte, folosind teorema lui Choquet, deja menționată, am arătat că pentru fiecare mulțime frontieră E peste tot densă, de tipul G_δ și de măsură nulă, există o derivată Pompeiu mărginită, continuă în fiecare punct din E și pentru care E este chiar mulțimea zerourilor (loc. cit., pp.6—7). S-a demonstrat în acest fel existența unei derivate Pompeiu mărginite, discontinu aproape peste tot. Pe o altă cale, care nu folosește teorema lui Choquet, dar care se prevalează de proprietatea apartenenței la clasa M_4 a lui Zahorski (clasă a cărei definiție a fost amintită mai sus), existența derivatelor Pompeiu mărginite, discontinu aproape peste tot, a fost regăsită de către J. S. Lipiński în 1965 (într-un articol publicat în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées”). Ca o curiozitate, menționez că J. S. Lipiński dă acest rezultat ca răspuns la o întrebare

pe care am pus-o în 1963 (loc. cit., p.31), fără să fi observat (nici noi nici d-sa) că, de fapt, răspunsul afirmativ la întrebarea în cauză („Există o derivată Pompeiu mărginită, a cărei mulțime de zerouri este de măsură nulă?”) era dat chiar în articolul în care întrebarea era formulată (loc. cit., teorema 6, p.6).

În legătură cu dificultatea problemei privind structura mulțimii de zerouri ale unei derivate a lui Pompeiu sau ale unei derivate oscilante trebuie să observăm că această problemă nu este reductibilă la problema, mai simplă, a structurii mulțimii punctelor de continuitate. Este adevărat că orice punct de continuitate al unei derivate Pompeiu sau al unei derivate oscilante este un zero al acestei derivate, dar reciproca nu este adevărată. În unele exemple de mai sus, mulțimea punctelor de continuitate era inclusă în mulțimea zerourilor; dar există derivate Pompeiu mărginite, care se anulează în origine, fără a fi continue în origine (a se vedea teorema 2 din articolul menționat al lui A. Bruckner, din 1965; din demonstrația acestei teoreme rezultă că derivata în cauză este nenegativă, fapt nespecificat în enunțul teoremei). Un alt exemplu de derivată Pompeiu mărginită, pentru care mulțimea punctelor de continuitate nu coincide cu mulțimea zerourilor, a fost obținut de către J. S. Lipiński (loc. cit., pp.448—449), cu ajutorul mulțimilor din clasa M_5 în sensul lui Zahorski. Amintim că o mulțime liniară E nevidă, de tipul borelian F_σ , este de clasa M_5 dacă orice punct din E este un punct de densitate (în sensul lui Lebesgue) pentru E , cu alte cuvinte, dacă pentru orice $x \in E$ avem:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(E \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

J. S. Lipiński se prevalează, în construcția sa, de o teoremă a lui Zahorski din 1950 (loc. cit., p.25), care afirmă că pentru orice mulțime E de clasă M_5 există o funcție φ aproximativ continuă, cu proprietatea că $0 < \varphi(x) \leq 1$ pentru $x \in E$ și $\varphi(x) = 0$ pentru $x \notin E$.

Se constată astfel că marile teoreme de caracterizare boreliană, categorială și metrică a diferitelor mulțimi asociate în mod natural unei funcții reale de o variabilă reală, teoreme obținute cu precădere în deceniile al patrulea, al cincilea și al șaselea ale secolului nostru, au permis pro-

grese esențiale în elucidarea structurii funcțiilor lui Pompeiu, iar acestea, la rândul lor, s-au dovedit de o mare utilitate în realizarea progreselor menționate.

*

Un rol de seamă l-au jucat derivatele lui Pompeiu în elucidarea raporturilor dintre diferite extensiuni ale conceptului de continuitate. Și aici, ca și în topologie, aceste derivate au servit la obținerea unor contraexemple rare.

În 1952 și în 1953, H. P. Thielman a introdus și studiat (în „Proceedings of the Iowa Academy of Sciences” și, respectiv, în „American Mathematical Monthly”) o clasă de funcții pe care le vom numi, fără legătură cu denumirea lor în engleză, pseudocontinue. O funcție f definită în spațiul metric $\langle X, d \rangle$, cu valori în spațiul metric $\langle X', d' \rangle$, este pseudocontinuă (în engleză: *cliquiss*) în punctul x din X dacă pentru orice sferă S care conține pe x există o sferă S_1 conținută în S pentru care $d'(f(y)), f(z)) < \varepsilon$ oricare ar fi y și z în S_1 .

O altă extensiune a continuității, în același cadru al spațiilor metrice, a fost studiată de A. P. Morse și W. W. Bledsoe în 1952 (în „Proceedings of the American Mathematical Society”). O funcție $f: \langle X, d \rangle \rightarrow \langle X', d' \rangle$ este învecinată (*neighborly*) în punctul $x \in X$ dacă pentru $\varepsilon > 0$ există o sferă S pentru care $d(x, y) + d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ oricare ar fi $y \in S$. Funcția f este învecinată în sens larg în punctul x dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o sferă S cu proprietatea $d(x, y) + d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$ oricare ar fi y și z în S .

În sfârșit, o extensiune mai veche a continuității este aceea întreprinsă în 1932 de către S. Kempisty (în „Fundamenta Mathematicae”). O funcție f definită pe spațiul topologic $\langle X, \tau \rangle$, cu valori în spațiul topologic $\langle X', \tau' \rangle$ este cvasicontinuă în punctul x din X , dacă pentru orice vecinătate $U \ni x$ și pentru orice vecinătate $V \ni f(x)$ există o mulțime deschisă $G \subseteq U$ pentru care $f(G) \subseteq V$.

Este ușor de demonstrat că, pentru funcțiile definite într-un spațiu metric, cu valori într-un spațiu metric, proprietatea de cvasicontinuitate este echivalentă cu proprietatea de învecinare (am arătat acest lucru în 1958, în „Proceedings of the American Mathematical Society”) și că pseudocontinuitatea este echivalentă cu învecinarea în sens larg.

De asemenea, cvasicontinuitatea implică pseudocontinuitatea, fără ca reciproca să fie adevărată (am dat acest rezultat în 1961, în „Colloquium mathematicum”).

Toate aceste aplicații și echivalențe se referă la comportarea într-un punct. Se pune în mod natural problema: Cît de importantă poate fi mulțimea punctelor în care o funcție este pseudocontinuă, fără a fi cvasicontinuă? Pentru funcțiile definite într-un spațiu metric complet, am arătat (1961, loc. cit.) că această mulțime este totdeauna de prima categorie Baire, deci neglijabilă din punctul de vedere al categoriei Baire. De fapt, acest lucru este adevărat chiar pentru mulțimea mai mare a punctelor în care o funcție este pseudocontinuă fără a fi continuă. Mai rămînea de văzut dacă și din punctul de vedere al măsurii este neglijabilă mulțimea în discuție. Utilizarea derivatelor lui Pompeiu mărginite ne-a permis să arătăm (1961, loc. cit.) că răspunsul este negativ. Pentru orice derivată Pompeiu finită, punctele de pseudocontinuitate care nu sînt puncte de cvasicontinuitate formează o mulțime de măsură pozitivă în orice interval. În plus, orice derivată Pompeiu finită este pseudocontinuă în orice punct. Apare astfel interesant faptul că, pentru orice derivată Pompeiu finită, punctele în care ea nu este învecinată formează o mulțime de măsură pozitivă în orice interval (1958, teorema 4, loc. cit.; această teoremă a fost enunțată în 1958 într-o formă mai slabă, dar examinarea demonstrației arată că ea se menține și sub forma dată aici. O observație similară trebuie făcută și pentru rezultatul menționat mai sus, din 1961).

Se știe că o funcție absolut continuă, a cărei derivată este egală cu zero aproape peste tot, se reduce la o constantă. O funcție cu derivată mărginită este absolut continuă, deci o funcție cu derivată mărginită pe $[a, b]$ nu poate avea derivată nulă aproape peste tot pe $[a, b]$ fără a se reduce la o constantă. Este naturală întrebarea dacă analogul acestei întrebări în termeni de categorie Baire are un răspuns similar. Cu alte cuvinte: Fiind dată o funcție f cu derivată mărginită pe $[a, b]$ și presupunînd că derivata f' se anulează pe complementara în raport cu $[a, b]$ a unei mulțimi de prima categorie Baire din $[a, b]$, rezultă că f se reduce la o constantă? În 1960 am arătat (în „Colloquium mathematicum”) că răspunsul este negativ: Există o funcție continuă și strict crescătoare, cu derivată mărginită pe $[a, b]$, derivata anulîndu-se în fiecare punct

al complementarei unei mulțimi de prima categorie. Însă, dacă examinăm demonstrația acestei teoreme, constatăm că de fapt s-a demonstrat mai mult: Orice derivată Pompeiu finită se anulează pe complementara unei mulțimi de prima categorie. Deci orice primitivă a unei derivate Pompeiu finită constituie un exemplu de tipul căutat.

*

Monotonia funcțiilor lui Pompeiu contrastează cu nemonotonia în orice interval a funcțiilor lui Köpcke. Este de așteptat ca acest fapt să se traducă printr-o deosebire puternică de structură între derivatele lui Pompeiu și derivatele lui Köpcke. După cum am amintit mai sus, în articolul privind derivatele lui Pompeiu și derivatele lui Köpcke, pe care l-am publicat în 1963, am demonstrat, cu ajutorul unui rezultat al lui Choquet, existența unei derivate Pompeiu mărginite, discontinue aproape peste tot (fapt regăsit în 1965 de către J. S. Lipiński). Apare în mod legitim întrebarea: Există această posibilitate și pentru derivatele lui Köpcke? Cu alte cuvinte, există o derivată Köpcke mărginită — sau măcar finită — care să fie discontinuă aproape peste tot? Nu cunoaștem răspunsul la această întrebare, dar îl bănuim afirmativ.

Aspecte interesante ale derivatelor oscilante pot fi identificate dacă se ține seama de ciclul de articole ale lui K. M. Garg privind funcțiile continue nicăieri monotone (primul publicat în 1962 în „Annales Univ. Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae”, iar următoarele două în 1962 și 1963 în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées”).

Derivatele lui Köpcke au comun cu derivatele lui Pompeiu faptul că mulțimea zerourilor și complementara acestei mulțimi sînt amîndouă dense în intervalul de definiție al acestor derivate. De aici decurge o anumită structură comună, dată de proprietăți ca: pozitivitatea măsurii complementarei mulțimii de zerouri, neintegrabilitatea riemanniană, faptul că mulțimea zerourilor este un rezidual, adică o complementară de mulțime de prima categorie Baire (acest din urmă fapt rezultă dintr-o propoziție de topologie, conform căreia orice mulțime G_δ frontieră este de prima categorie; a se vedea, de exemplu, p.49 a vol.I din tratatul de topologie al lui C. Kuratowski). Dar, dincolo

de această structură comună, cele două clase de derivate se opun prin atitudinea lor diferită în raport cu fenomenul de monotonie. Putem încerca o clasificare a derivatelor lui Köpcke din punctul de vedere al gradului lor de abatere față de derivatele lui Pompeiu. Am observat mai sus că derivatele lui Köpcke a căror primitivă este cu variație mărginită pot fi considerate o clasă intermediară în raport cu derivatele lui Köpcke a căror primitivă este cu variație nemărginită, pe de o parte, și derivatele lui Pompeiu, pe de altă parte. O altă posibilitate de departajare a derivatelor lui Köpcke ne este oferită de clasificarea funcțiilor nicăieri monotone în funcții de prima specie și funcții de-a doua specie (a se vedea articolul al treilea din ciclul lui K. M. Garg, semnalat mai sus). O funcție f nicăieri monotonă în intervalul I este de prima specie în I dacă există un număr real r pentru care funcția $f(x) + rx$ este monotonă în I ; o funcție nicăieri monotonă pentru care nu există un număr r cu proprietatea menționată este de-a doua specie în I . Aceasta constituie o ușoară modificare a unor definiții mai vechi, conform cărora o funcție $f(x)$ oscilantă în orice interval din I este de prima specie dacă există două numere l și m pentru care $f(x) + lx + m$ este monotonă în I și este de-a doua specie dacă nu este de prima specie (a se vedea pp.374—375 din tratatul menționat al lui Hobson). De fapt, cele două definiții sînt echivalente, deoarece două funcții care diferă printr-o constantă sînt sau amîndouă monotone sau amîndouă nemonotone.

O derivată f' a lui Köpcke, mărginită inferior sau superior, admite totdeauna ca primitivă o funcție nicăieri monotonă (adică oscilantă) de prima specie. Într-adevăr, din existența unui număr m cu proprietatea $f'(x) > m$ pentru $x \in I$ rezultă că $f(x) - mx$ este crescătoare pe I , deci f este de prima specie. Dacă $f'(x) < m$, $f(x) - mx$ este descrescătoare, deci din nou f este de prima specie. Din faptul că f' schimbă semnul în orice interval rezultă că f nu este monotonă în nici un interval.

Reciproc, dacă o derivată $f'(x)$ admite ca primitivă o funcție nicăieri monotonă (adică oscilantă) de prima specie, atunci această derivată este de tipul lui Köpcke și este superior sau inferior mărginită. Într-adevăr, din faptul că există m astfel încît $f(x) + mx$ este monotonă, rezultă că $f'(x) + m$ păstrează un semn constant, deci f' este

superior sau inferior mărginită, după cum $f'(x) + m < 0$ sau $f'(x) + m > 0$. Pe de altă parte, din faptul că f este oscilantă rezultă că f' schimbă semnul în orice interval.

O derivată $f'(x)$ a lui Köpcke, nemărginită nici inferior, nici superior în nici un interval din I , admite totdeauna ca primitivă în I o funcție nicăieri monotona de-a doua specie. Într-adevăr, dacă ar exista un număr m cu proprietatea că $f(x) + mx$ este monotonă în I , aceasta ar implica un semn constant pentru derivata $f'(x) + m$, deci mărginirea inferioară sau superioară a derivatei $f'(x)$, în contradicție cu ipoteza.

Reciproc, dacă f este oscilantă de-a doua specie, atunci f' este o derivată a lui Köpcke și nu este mărginită nici inferior nici superior, în nici un interval. Într-adevăr, dacă f' ar fi mărginită superior (inferior), atunci ar exista un număr m cu proprietatea că $f(x) + mx$ ar fi descrescătoare (respectiv crescătoare) în contradicție cu ipoteza că f este de-a doua specie.

Putem sintetiza toate aceste rezultate în modul următor: Fiind dată o funcție f care admite derivată f' pe intervalul I , f este oscilantă pe I dacă și numai dacă f' este o derivată a lui Köpcke pe I ; f este oscilantă de prima specie dacă și numai dacă f' este o derivată a lui Köpcke, dar mărginită inferior sau superior; f este oscilantă de-a doua specie dacă și numai dacă f' este o derivată a lui Köpcke, dar nemărginită atât inferior, cât și superior, în orice interval. (Amintim că peste tot înțelegem prin funcție oscilantă o funcție care oscilează în orice interval.)

Toate aceste rezultate pot fi subsumate și unui rezultat mai general al lui K. M. Garg (p.84 a celui de-al treilea articol din ciclul menționat): O funcție f continuă și nicăieri monotona este de prima specie în I dacă și numai dacă unul (deci fiecare) dintre numerele ei derivate este mărginit superior sau inferior în I ; f este de-a doua specie în I dacă și numai dacă unul (deci fiecare) dintre numerele derivate este nemărginit atât inferior, cât și superior, în orice interval din I .

Este clar că derivatele lui Köpcke a căror primitivă este cu variație mărginită conțin ca un caz particular derivatele lui Köpcke a căror primitivă este de prima specie. Într-adevăr, dacă f este de prima specie, există o funcție φ monotonă, astfel încât $f(x) = \varphi(x) - mx$, deci, ca diferență a două funcții monotone, f este cu variație

mărginită. Reciproca nu este adevărată; există derivate ale lui Köpcke a căror primitivă este cu variație mărginită, fără a fi de prima specie.

Rezultă așadar o ierarhie în patru trepte a derivatelor avînd o mulțime frontieră și densă de zerouri:

1) Derivatele lui Pompeiu (la rîndul lor ierarhizate în subclase ca: derivate Pompeiu mărginite, derivate Pompeiu finite, derivate Pompeiu — finite sau infinite).

2) Derivate ale lui Köpcke, a căror primitivă este cu variație mărginită și de prima specie (și acestea se pot departaja în mărginite, finite, finite sau infinite; însă nu este posibil ca derivata să fie nemărginită în orice interval, în particular, nu este posibil ca derivata să fie infinită în orice interval, deoarece în acest caz, conform unui rezultat stabilit mai sus, primitiva ar fi de-a doua specie).

3) Derivate ale lui Köpcke, a căror primitivă este cu variație mărginită, dar de-a doua specie (acestea se pot departaja în finite și finite sau infinite, dar, conform unui rezultat de mai sus, nu pot fi mărginite în orice interval).

4) Derivate ale lui Köpcke a căror primitivă nu este cu variație mărginită (acestea se pot departaja în finite și finite sau infinite).

În toate considerațiile de mai sus, distincția dintre funcțiile nicăieri monotone de prima specie și cele nicăieri monotone de-a doua specie a fost operată doar la nivelul funcției primitive, nu și la cel al derivatei. Ar fi interesant să se stabilească deosebirea de structură dintre derivatele oscilante de prima specie și cele oscilante de-a doua specie (în ipoteza că fiecare dintre cele două specii este posibilă). Dintr-o propoziție stabilită de K. M. Garg (p.85 a articolului al treilea din ciclul menționat) rezultă că dacă o derivată oscilantă $f'(x)$ este de-a doua specie, atunci, pentru fiecare număr $r > 0$, fiecare interval I conține fie o mulțime de măsură pozitivă de puncte în care cel puțin un număr derivat al funcției $f'(x)$ este mai mare ca r (mai mic decît $-r$), fie o mulțime densă de puncte în care cel puțin un număr derivat al lui $f'(x)$ este $+\infty(-\infty)$.

Să observăm că atît derivatele lui Pompeiu, cît și derivatele lui Köpcke sînt derivate oscilante (adică nemonotone în nici un interval). Acest fapt accentuează importanța întrebării: Există derivate oscilante de prima specie? Vom arăta că răspunsul este negativ. Într-adevăr, fie f' oscilantă, de prima specie pe I . Rezultă existența unui număr a

pentru care $f'(x) + ax$ este monotonă, deci f' este o funcție cu variație mărginită pe I . Însă o derivată nu admite discontinuități de prima specie, în timp ce o funcție cu variație mărginită nu admite discontinuități de-a doua specie; deci f' este continuă pe I . Avînd o mulțime densă de zerouri, f' este identic nulă, în contradicție cu faptul că este oscilantă.

Rezultă că distincția operată de Hobson și Garg în clasa funcțiilor nicăieri monotone, prin introducerea noțiunilor de funcție de prima specie și funcție de-a doua specie nu este aplicabilă la nivelul derivatelor oscilante, acestea fiind totdeauna de-a doua specie. Trebuie căutate alte criterii, mai fine, pentru departajarea intrinsecă a derivatelor oscilante. Distincția *derivată a lui Pompeiu* — *derivată a lui Köpcke* este una din soluțiile posibile ale acestei probleme.

Primele trei trepte din ierarhia de mai sus furnizează cazuri particulare de funcții cu variație mărginită, a căror derivată se anulează pe un rezidual. Este aici un analog — în termeni de categorie Baire — al așa-numitelor funcții singulare, care sînt, prin definiție, funcții cu variație mărginită a căror derivată se anulează aproape peste tot. O prezentare mai sistematică a funcțiilor singulare, cu bibliografia corespunzătoare, a fost publicată în 1969, de către K. M. Garg (în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées”). În articolul deja menționat, pe care l-am publicat în 1963, am studiat, sub numele de funcții de tipul P_3 , o clasă înrudită: aceea a funcțiilor continue, admitînd o derivată nulă pe o mulțime frontieră peste tot densă (deci pe un rezidual!). În același articol am dat o atenție specială operațiilor cu funcții și cu derivate ale lui Pompeiu, dar unele probleme privind aceste operații au rămas nerezolvate. O condiție necesară și suficientă ca produsul a două funcții Pompeiu cu derivată mărginită să fie de asemenea o funcție Pompeiu cu derivată mărginită a fost dată de către Umberto Olivieri în 1968 (în „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo”). Același autor stabilește și alte rezultate interesante privind operațiile cu funcțiile lui Pompeiu.

Șirul surprizelor pe care ni le-au rezervat funcțiile lui Pompeiu nu se încheie aici. În 1952 (într-un articol publicat în „Buletinul științific al Academiei, Seria matematică”) profesorul Alexandru Froda stabilește o legătură neașteptată între două dintre cele mai interesante fenomene

patologice pe care le cunoaște analiza matematică: ecuațiile lui Lavrentiev și funcțiile lui Pompeiu. În 1925, M. Lavrentiev pusese în evidență un fenomen deosebit de interesant. Se știa de multă vreme că proprietatea de continuitate a funcției $f(x,y)$ este suficientă pentru a garanta, pentru fiecare punct (x_0, y_0) din intervalul bidimensional de definiție a funcției $f(x,y)$, existența unei soluții a ecuației diferențiale $y' = f(x,y)$ care trece prin punctul (x_0, y_0) . Se știa de asemenea că proprietatea de continuitate a funcției $f(x,y)$ nu este suficientă pentru a garanta, pentru fiecare punct (x_0, y_0) , unicitatea soluției care trece prin (x_0, y_0) , dar nu era clar cât de mult poate fi încălcată unicitatea soluției, cu alte cuvinte, cât de mare (în sensul măsurii, al categoriei și al cardinalității) poate fi mulțimea punctelor prin care soluția nu este unică și cât de multe soluții pot să treacă prin aceste puncte. Lavrentiev dăduse în 1925 un răspuns complet la aceste întrebări, producând un exemplu de funcție $f(x,y)$ continuă pentru $a < x < b$, $c < y < d$, astfel încât prin fiecare punct (x_0, y_0) din intervalul bidimensional de continuitate a funcției f trec o infinitate de soluții ale ecuației diferențiale $y' = f(x,y)$, soluții care sînt distincte două câte două într-o vecinătate destul de mică a punctului (x_0, y_0) .

Alexandru Froda a reușit să arate că fiecare funcție a lui Pompeiu dă naștere unei ecuații diferențiale de tipul $y' = f(x,y)$, avînd toate proprietățile ecuației lui Lavrentiev, cu excepția proprietății de continuitate a funcției f . Mai precis, Alex. Froda a arătat că dacă $G(t)$ este o funcție continuă, strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$, avînd o derivată $G'(t)$ finită pe $[\alpha, \beta]$, atunci, notînd cu $F(x)$ inversa funcției G și cu $[a, b]$ intervalul de definiție al funcției F , ecuația diferențială

$$y' = \frac{1}{F'(y)}$$

va avea, în intervalul bidimensional $a \leq x \leq b$, $F(a) \leq y \leq F(b)$, proprietatea că prin fiecare punct (x_0, y_0) trec o infinitate de soluții ale ecuației, soluții distincte două câte două într-o vecinătate anumită a punctului (x_0, y_0) . Faptul că funcția din membrul al doilea al ecuației lui Froda admite în intervalul bidimensional $a \leq x \leq b$, $F(a) \leq y \leq F(b)$ o mulțime densă de puncte de discontinuitate nu deranjează prea mult. Proprietatea de continuitate

era considerată de Lavrentiev datorită faptului că ea garanta existența soluției. Însă în cazul ecuației lui Froda această existență este oricum garantată pentru fiecare punct, indiferent de faptul că aceasta este sau nu un punct de continuitate al funcției $1/F'(y)$.

Să mai observăm că, cu prilejul construcției sale, Alex. Froda arată că există derivate Pompeiu finite pe toată axa reală, ale căror primitive iau toate valorile reale.

Și în construcția lui Froda s-a putut vedea avantajul pe care-l oferă derivatele lui Pompeiu în raport cu derivatele oscilante. Posibilitatea de a considera derivata inversei funcției lui Pompeiu era legată în mod esențial de faptul că aceasta este strict monotonă.

*

Ulterior s-a trecut la studiul global al clasei funcțiilor lui Pompeiu cu derivată finită și al funcțiilor cu derivată oscilantă finită, arătându-se, de către G. Petruška și M. Łaczkovich (sub tipar la „Acta mathematica Acad. Scientiarum Hungaricae”), că această clasă constituie o mulțime peste tot densă în spațiul funcțiilor continue, prevăzut cu topologia convergenței uniforme. Este un argument tardiv, de ordin global, pentru caracterul neexcepțional al funcțiilor lui Pompeiu și al celor ale lui Köpcke în clasa mai largă a funcțiilor continue. Ar fi interesant însă de văzut dacă se poate spune același lucru despre situația funcțiilor lui Pompeiu în clasa funcțiilor strict crescătoare și continue.

În 1958 am arătat (într-un articol publicat în „Bulletin mathématique de la Société des sciences math. de la R. P. R.”) că dacă două funcții derivate, integrabile Riemann pe $[a, b]$, coincid pe o mulțime densă din $[a, b]$, atunci ele sînt identice pe $[a, b]$. Derivatele mărginite ale lui Pompeiu ne-au permis să arătăm că teorema enunțată nu mai rămîne în vigoare dacă se renunță la ipoteza integrabilității Riemann.

În 1963 (în „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo”) am studiat diferite operații cu funcții Pompeiu și cu funcții Köpcke și diferite extensiuni ale derivatelor lui Pompeiu, printre care extensiunea care se obține prin înlocuirea derivatei ordinare cu derivata aproximativă.

*

O funcție f definită pe $[a, b]$ are proprietatea M'_2 a lui Zahorski dacă pentru orice interval I nenul conținut în $[a, b]$ mulțimile $\{x; f(x) > \alpha\} \cap I$ și $\{x; f(x) < \alpha\} \cap I$ sînt de măsură pozitivă ori de cîte ori sînt nevide. Proprietatea lui Denjoy constă în faptul că mulțimea $\{x; \alpha < f(x) < \beta\} \cap I$ este de măsură pozitivă ori de cîte ori este nevidă. Pentru funcțiile de prima clasă Baire, L. Mišik a demonstrat în 1966 (în revista „Časopis pro pěstování matematiky”) că proprietatea lui Zahorski și proprietatea lui Denjoy sînt echivalente și implică proprietatea lui Darboux (fapt arătat încă de Zahorski, în memoriul său din 1950), fără a fi implicate de aceasta. Se pune, în aceste condiții, problema raporturilor dintre cele trei proprietăți în cazul funcțiilor de-a doua clasă Baire. Această problemă a fost rezolvată de L. Mišik și J. S. Lipiński. În particular, J. S. Lipiński a arătat în 1967 (în „Časopis pro pěstování matematiky”) că, folosindu-se o derivată oscilantă ale cărei zerouri formează o mulțime de măsură nulă, se poate construi o funcție de-a doua clasă Baire care are proprietatea M'_2 a lui Zahorski, dar este lipsită atît de proprietatea lui Denjoy, cît și de proprietatea lui Darboux. Pe aceeași cale, se poate obține un exemplu de funcție de-a doua clasă Baire care are atît proprietatea lui Darboux, cît și proprietatea M'_2 a lui Zahorski, dar este lipsită de proprietatea lui Denjoy.

*

Cea mai recentă utilizare a derivatelor lui Pompeiu pare să fie datorită lui J. S. Lipiński.

Fiind dată o funcție reală $f(x, y)$ definită pe intervalul bidimensional $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, se pune în mod natural problema legăturii dintre măsurabilitatea Lebesgue a funcției f în raport cu ansamblul variabilelor și măsurabilitatea Lebesgue a funcțiilor ei parțiale $f(x, y_0), f(x_0, y)$, obținute prin fixarea valorii unuia sau altuia dintre argumente. Dintr-o teoremă clasică, rezultă că dacă $f(x, y)$ este măsurabilă, atunci, exceptînd o mulțime liniară de măsură nulă de valori ale lui y_0 , respectiv x_0 , funcțiile $f(x, y_0)$ și $f(x_0, y)$ sînt măsurabile în raport cu x și, respectiv, în raport cu y . Însă reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Se cunosc funcții $f(x, y)$ nemăsurabile, pentru care toate funcțiile parțiale (atît cele în raport cu x , cît

și cele în raport cu y) sînt măsurabile. Mai mult, există o funcție $f(x,y)$ nemăsurabilă, ale cărei funcții parțiale sînt, toate, de prima clasă Baire și au proprietatea lui Darboux. Acest fapt a fost stabilit în 1972 de către J. S. Lipiński (în „Bulletin de l'Académie polonaise des sciences”), iar în 1973 același autor a regăsit acest rezultat pe o cale diferită, folosindu-se de derivatele Pompeiu și de teorema lui Choquet și Maximov de caracterizare a transformatelor topologice ale derivatelor. În aceste condiții, se pune problema de a se găsi condiții cît mai largi asupra funcțiilor parțiale, care să asigure măsurabilitatea funcției $f(x,y)$. Deoarece proprietatea lui Darboux și apartenența la prima clasă Baire se dovedesc a fi insuficiente pentru aceasta, este natural să ne întrebăm dacă proprietatea tuturor funcțiilor parțiale de a fi derivate finite generează măsurabilitatea funcției $f(x,y)$. Problema aceasta nu și-a aflat încă răspunsul.

Derivatele mărginite ale lui Pompeiu sînt amplu prezentate în volumul al doilea (apărut în 1958) al tratatului de analiză matematică în trei volume, al prof. Miron Nicolescu.

O parte din rezultatele relative la derivatele lui Pompeiu sînt inventariate în articolul de sinteză asupra derivatelor, publicat în 1966 de către A. M. Bruckner și J. L. Leonard (în „American Mathematical Monthly”, Part. II).

*

Aceasta este imaginea — doar parțială — a modului în care funcțiile lui Pompeiu și-au exercitat influența asupra dezvoltării moderne a analizei matematice și a topologiei generale și a modului în care acestea din urmă au permis aprofundarea structurii funcțiilor lui Pompeiu.

Cînd, în urmă cu vreo 17 ani, pregăteam pentru publicare opera matematică a lui Pompeiu, am fost frapat de eleganța și conciziunea expunerii sale, de eficacitatea observațiilor sale, de aparenta facilitate a rezultatelor sale. Fără îndoială că reflecția matematică era pentru Pompeiu în ordinea naturală a vieții sale cotidiene; dacă, prin absurd, matematica n-ar fi existat, ar fi inventat-o, pentru că nu putea trăi fără ea. Simplitatea rezultatelor sale, rezonanța lor îndepărtată contrastează cu atîtea speculații bazate pe

o cantitate enormă de definiții pe care știința le aruncă repede peste bord, nimeni nemaiamintindu-și de ele.

Mirarea matematică a lui Pompeiu s-a exercitat totdeauna asupra unor chestiuni care se situau în cea mai firească prelungire a răspunsurilor existente. Lecția pe care ne-o dă opera sa este în primul rând aceea a modului de a te întreba. Dar după fiecare întrebare urmează o mișcare magică de baghetă, un pas care se refuză oricărei rețete, oricărui algoritm și după care problema în discuție își dezvăluie dintr-o dată o ipostază nouă.

Pompeiu a fost un mare matematician al faptului ciudat, în genul în care polonezii l-au avut pe Sierpiński. Un mare matematician al construcțiilor insolite, menite să incite curiozitatea unui mare număr de savanți. Un tip de matematician care astăzi, la noi, se cultivă din păcate mai rar, dar pe care tineretul nostru matematic ar trebui să-l cunoască și să-l frecventeze, pentru a evita o dezvoltare matematică unilaterală.

Pînă la începutul secolului nostru se cunoșteau două feluri de proprietăți punctuale pe care o funcție le poate avea în domeniul ei de definiție: proprietăți locale, care au loc în *anumite* puncte, și proprietăți globale, care au loc în *toate* punctele din domeniul de definiție. Se știa, de exemplu, că o funcție derivabilă pe $[a,b]$ este continuă în toate punctele din $[a,b]$, în timp ce o funcție continuă pe $[a,b]$ poate fi derivabilă în unele puncte și nederivabilă în alte puncte din $[a,b]$. Dar încă din secolul trecut, odată cu studiul seriilor trigonometrice, se constata că mulțimea punctelor în care are loc o anumită proprietate poate prezenta o structură complicată (mulțimea punctelor de convergență ale unei serii trigonometrice, mulțimea punctelor de continuitate ale unei funcții integrabile etc.), fapt care a constituit un puternic impuls pentru dezvoltarea teoriei mulțimilor. Începutul secolului nostru avea să promoveze un nou punct de vedere în studiul funcțiilor, cel legat de considerarea mulțimilor neglijabile. Între proprietățile care au loc doar într-un punct sau în cîteva puncte și cele care au loc în toate punctele de definiție ale unei funcții există o situație intermediară: aceea în care o funcție posedă o anumită proprietate în fiecare punct în care ea este definită, *cu excepția unei anumite mulțimi neglijabile*. Nu este vorba aici de o simplă apreciere psihologică; caracterul neglijabil urma să fie precizat în mod riguros, după un criteriu de întindere, de cardinalitate, de categorie Baire sau de altă natură. Fiecare problemă își are clasa ei de mulțimi neglijabile. O experiență de 70 de ani a arătat că o clasă de mulțimi neglijabile este de obicei o clasă ereditară și numărabil aditivă de mulțimi. Cele mai importante clase de acest fel sînt: clasa mulțimilor cel mult numărabile, clasa mulțimilor de măsură Lebesgue nulă și clasa mulțimilor de prima categorie Baire. Fiind dată o clasă \mathfrak{F} de funcții definite pe $[a,b]$, ei i se pot asocia

de obicei o proprietate P și o clasă \mathcal{N} de mulțimi neglijabile, cu proprietatea că pentru fiecare funcție f din \mathcal{F} există o mulțime A în \mathcal{N} astfel încât în orice punct din afara lui A funcția f posedă proprietatea P . În cadrul celor mai multe clase de funcții lucrurile se desfășoară în așa fel încât structura funcțiilor din clasă poate prezenta și unele aspecte mai complicate, dar aceste complicații sînt îngrămădite pe o mulțime neglijabilă dintr-un anumit punct de vedere. Situația aceasta amintește de unele jocuri ale copiilor, cărora li se propune ca, așezînd un desen într-un mod adecvat, să observe anumite obiecte, animale sau persoane care nu sînt observabile la o așezare întîmplătoare a desenului. Așezînd intervalul de definiție al funcțiilor dintr-o anumită clasă într-un mod adecvat — adică sub forma unei descompunerii convenabile într-o mulțime neglijabilă și complementara acesteia — va apărea pe aceasta din urmă o proprietate care nu are loc pe întregul interval de definiție. Iată trei exemple, care sînt tot atîtea teoreme clasice ale analizei matematice. Fiecărei funcții monotone pe intervalul $[a, b]$ i se asociază o mulțime cel mult numărabilă A , astfel încât în orice punct din $[a, b] - A$ funcția este continuă. Fiecărei funcții cu variație mărginită pe $[a, b]$ i se asociază o mulțime B de măsură Lebesgue nulă, astfel încât în orice punct din $[a, b] - B$ funcția este derivabilă. Fiecărei funcții de prima clasă Baire i se asociază o mulțime C de prima categorie Baire, astfel încât în orice punct din $[a, b] - C$ funcția este continuă. Primele două teoreme sînt datorite lui Henri Lebesgue, în timp ce ultima teoremă a fost stabilită de către René Baire.

Toate aceste rezultate sînt cunoscute încă din primul deceniu al secolului nostru. De atunci s-au acumulat un număr mare de teoreme de acest fel, iar natura mulțimilor neglijabile s-a diversificat și ea.

Primele decenii ale secolului nostru au adus însă în atenția matematicienilor și un alt tip de mulțimi neglijabile. Acestea nu mai sînt situate în domeniul de definiție al funcției, ci în domeniul valorilor ei. Primele rezultate de acest fel sînt datorite lui Sierpiński și Luzin. Teorema lui Sierpiński afirmă că mulțimea valorilor luate de o funcție oarecare în punctele ei de extremum (strict sau nu) este cel mult numărabilă; cu alte cuvinte, pentru orice funcție

$f: R \rightarrow R$ există o mulțime A cel mult numărabilă, conținută în R , astfel încât, oricare ar fi punctul x pentru care $f(x)$ nu aparține lui A , x nu este un punct de extremum pentru f . Teorema lui Luzin afirmă că valorile pe care o funcție continuă le ia în punctele în care derivata ei se anulează formează o mulțime de măsură Lebesgue nulă.

Teoremele lui Sierpiński și Luzin inaugurează deci un nou tip de mulțimi neglijabile, situate nu în domeniul de definiție, ci în cel al valorilor funcției. Teorema lui Sierpiński este de fapt o simplă observație, la îndemână azi oricărui student, ea revenind la faptul că o familie de intervale disjuncte două câte două este obligatoriu cel mult numărabilă. Teorema lui Luzin corespunde și ea așteptărilor, fiind o prelungire a teoremei clasice conform căreia o funcție a cărei derivată este identic nulă în $[a, b]$ este constantă în $[a, b]$. Prima teoremă de anvergură în care mulțimea neglijabilă este situată în domeniul valorilor și care reușește să pună în evidență o simplificare surprinzătoare a raporturilor dintre numerele derivate ale unei funcții continue, în toate punctele în care funcția ia valori care nu aparțin mulțimii neglijabile, a fost obținută de Simion Stoilow în anul 1924. Înainte de a enunța această teoremă, vom aminti că pentru orice valoare a a unei funcții continue mulțimea $\{x; f(x) = a\}$ este închisă. Punctele unei mulțimi liniare (închise) sînt de două feluri: de prima specie, dacă există un interval deschis, cu extremitatea în punctul considerat, conținut în complementara mulțimii și de a doua specie în cazul contrar. Printre punctele de prima specie pot exista și puncte izolate în mulțimea închisă considerată.

Iată acum enunțul teoremei lui Stoilow:

Fie f o funcție continuă pe $[a, b]$, cu valori reale. Există o mulțime reală A , de măsură Lebesgue nulă, astfel încât, pentru orice număr ξ care nu aparține lui A are loc următoarea situație: În fiecare punct de prima specie al mulțimii $L_\xi = \{x; f(x) = \xi\}$ numărul derivat inferior la stînga este egal cu numărul derivat superior la dreapta, iar numărul derivat superior la stînga este egal cu numărul derivat inferior la dreapta. În fiecare punct izolat al mulțimii L_ξ funcția f admite derivată (deci cele patru numere derivate coincid). Dacă numerele derivate de o aceeași parte sînt mărginite în punctele mulțimii L_ξ (această parte putînd varia de la un punct la altul, deci fiind cînd stînga, cînd dreapta)

atunci L_f este o mulțime finită ; dacă aceste numere derivate sînt doar finite, atunci L_f este o mulțime cel mult numărabilă.

Singurul instrument folosit de Stoilow pentru a obține această teoremă este teorema lui Lebesgue asupra derivabilității funcțiilor monotone. Teorema lui Stoilow pune în evidență o simplitate remarcabilă în comportarea unei funcții continue, în orice punct în care ia o valoare care nu aparține mulțimii neglijabile asociate. Pentru a aprecia această simplitate, este suficient să evaluăm numărul extraordinar de mare de posibilități combinatorii în ceea ce privește situația reciprocă a celor patru numere derivate, posibilități îngrămădite însă pe o mulțime a cărei imagine prin f este de măsură nulă ; în celelalte puncte, o selecție riguroasă reține doar cîteva situații, care, în ipoteze foarte largi, obligă mulțimile de nivel să fie finite sau numărabile.

Din teorema sa, Stoilow deduce cu ușurință o teoremă a lui Saks, care generalizează teorema lui Luzin de mai sus și care afirmă că valorile pe care o funcție continuă le ia în punctele în care cel puțin un număr derivat este egal cu zero formează o mulțime de măsură nulă. Dar mai deduce și o altă teoremă, mult mai importantă, care în acel moment domina teoria funcțiilor de o variabilă reală: teorema lui Denjoy asupra situației numerelor derivate ale unei funcții continue. Iată enunțul teoremei lui Denjoy : Fiind dată o funcție f continuă pe $[a,b]$, cu valori reale, există o mulțime A conținută în $[a,b]$, de măsură Lebesgue nulă, astfel încît în orice punct care nu aparține lui A două numere derivate asociate (adică de aceeași parte a punctului) sînt sau egale și finite sau diferite, unul cel puțin fiind infinit ; două numere derivate opuse (adică cel inferior la stînga și cel superior la dreapta sau cel superior la stînga și cel inferior la dreapta) sînt sau finite și egale sau amîndouă infinite, dar de semn diferit.

Este interesant să observăm și analogiile, dar și deosebirile dintre teorema lui Denjoy și cea a lui Stoilow. Amîndouă se referă la situația numerelor derivate ale unei funcții continue și amîndouă pun în evidență o simplificare care se produce de îndată ce se înlătură o mulțime de măsură nulă. Dar în timp ce în teorema lui Denjoy această mulțime neglijabilă este situată în intervalul de definiție al funcției, în teorema lui Stoilow ea este o parte din mulțimea valorilor funcției. Mai important ni se pare

faptul că simplificările puse în evidență de teorema lui Stoilow în complementara mulțimii neglijabile sînt mai mari și de o natură mai structurală decît simplificările corespunzătoare din teorema lui Denjoy. În această din urmă teoremă este vorba de o descriere atomistică, deci esențialmente punctuală, a comportării numerelor derivate pe complementara mulțimii neglijabile, în timp ce în teorema lui Stoilow se descrie comportarea numerelor derivate în termeni de mulțimi de nivel, indicîndu-se totodată cazuri precise în care aceste mulțimi de nivel sînt finite sau numărabile.

Faptul că teorema lui Denjoy poate fi dedusă din teorema lui Stoilow nu constituie un lucru senzațional, dacă ținem seama că fiecare dintre ele a fost stabilită cu ajutorul teoremei lui Lebesgue, privind derivabilitatea funcțiilor monotone. Rămîne în orice caz probată în acest fel posibilitatea de a așeza teorema lui Stoilow la baza teoremeilor de derivare în care mulțimile neglijabile sînt situate în domeniul de definiție al funcției. Ceea ce ni se pare mai important este faptul că *teorema lui Stoilow constituie obirșia comună a unui întreg șir de teoreme astăzi clasice, dar obținute ulterior teoremei lui Stoilow și fără ca autorii lor să se fi prevalat de ea.* Vom prezenta în cele ce urmează această situație bizară, în care mai mulți matematicieni de seamă, ca Banach, Saks și Minakshisundaram, au putut să-și complice căile de acces la niște rezultate pe care teorema lui Stoilow le implica într-un mod simplu și elegant. Lucrul este cu atît mai de mirare cu cît teorema lui Stoilow a fost publicată în două reviste de mare circulație: „Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris” (în 1924) și „Bulletin de la Société Mathématique de France” (în 1925). Am semnalat toate acestea încă în 1957, în volumul omagial dedicat lui Simion Stoilow, cu prilejul celei de a 70-a aniversări. Încă atunci am exprimat posibilitatea de a desprinde din teorema lui Stoilow consecințe mult mai puternice decît cele pe care le-am putut degaja și care nu utilizează din teorema în discuție decît faptul că în fiecare punct izolat al unei mulțimi de nivel neexcepționale există derivată. Probabil că o bună parte din capitolul IX al cărții lui Saks *Theory of the integral* poate fi clădită pe teorema în discuție a lui Stoilow.

Vom nota cu A mulțimea neglijabilă din teorema lui Stoilow.

Se spune, după Banach, că o funcție f satisface condiția T_1 , dacă valorile pe care f le ia de o infinitate de ori formează o mulțime de măsură nulă. S. Saks a demonstrat în 1931 (deci la șapte ani după publicarea teoremei lui Stoilow) următorul rezultat: O condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție f continuă să satisfacă condiția T_1 este ca valorile pe care f le ia în punctele în care nu există derivată (finită sau infinită) să formeze o mulțime de măsură nulă.

Să regăsim acest rezultat cu ajutorul teoremei lui Stoilow. Să stabilim mai întâi necesitatea condiției. Fie ξ o valoare care nu aparține lui A și care este luată de f doar într-un număr finit de puncte. Mulțimea $\{x; f(x) = \xi\}$ este deci formată exclusiv din puncte izolate. Rezultă, în virtutea teoremei lui Stoilow, că f are derivată în fiecare punct din L_ξ . Orice valoare luată de f într-un punct în care nu are derivată este deci o valoare luată de o infinitate de ori. Însă astfel de valori formează, prin ipoteză, o mulțime de măsură nulă. Condiția este deci necesară. În ceea ce privește suficiența condiției, ea este imediată, dacă ținem seama de teorema lui Luzin, despre care a fost vorba mai sus. Deoarece din teorema lui Stoilow rezultă o teoremă care generalizează teorema lui Luzin (așa cum am semnalat mai sus), putem spune că și suficiența condiției rezultă din teorema lui Stoilow. Teorema lui Saks este astfel complet demonstrată.

Se spune, după Banach, că o funcție f satisface condiția T_2 , dacă valorile luate de f de o infinitate nenumărabilă de ori formează o mulțime de măsură nulă. S. Saks a stabilit în 1931 teorema următoare: Dacă f satisface pe $[a, b]$ condiția T_2 , atunci $-\mu f(N) \leq f(b) - f(a) \leq \mu \cdot f(P)$, unde P , respectiv N , reprezintă mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care f posedă derivată nenegativă, respectiv nepozitivă, iar μ reprezintă măsura Lebesgue. Mulțimea $D = P \cup N$ este nenumărabilă, cel puțin una dintre mulțimile $f(P)$, $f(N)$ fiind de măsură pozitivă (a se vedea și pp.280–281 din monografia menționată a lui Saks, din 1937).

Din teorema lui Stoilow nu numai că putem regăsi această teoremă a lui Saks, dar putem deduce și următorul rezultat mai puternic: Fie f continuă și satisfăcând condiția T_2 pe $[a, b]$. Fie D mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care f are derivată (finită sau infinită). În aceste condiții, mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă. (Prin m

și M am notat marginile inferioară și superioară ale lui f pe $[a, b]$). Pentru demonstrație, să notăm cu B mulțimea de măsură nulă a valorilor pe care f le ia de o infinitate nenumărabilă de ori. Fie ξ un număr care nu aparține mulțimii $A \cup B$. Mulțimea L_ξ fiind închisă și numărabilă, conține un punct izolat x_0 . Conform teoremei lui Stoilow, f admite o derivată unică (finită sau infinită) în x_0 , deci x_0 aparține lui D , iar mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă.

Să observăm că de fapt avem următorul rezultat mai general: Dacă, exceptând o mulțime de măsură nulă de nivele, fiecare nivel al unei funcții continue f conține un punct izolat, atunci mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă.

Se spune, după Luzin, că funcția f posedă proprietatea N , dacă imaginea, prin f , a oricărei mulțimi de măsură nulă este de asemenea o mulțime de măsură nulă. Rezultatul pe care tocmai l-am obținut ne permite să regăsim și să întărim o remarcabilă teoremă dată de Banach în 1926: Pentru orice funcție continuă, cu proprietatea N , punctele de derivabilitate formează o mulțime de măsură strict pozitivă. Față de această teoremă a lui Banach, vom stabili următoarea întărire a teoremei lui Banach: Dacă f este continuă și are proprietatea N pe $[a, b]$ atunci, notând cu V mulțimea valorilor lui f în punctele de derivabilitate, mulțimea $[m, M] - V$ este de măsură nulă. Pentru demonstrație, să amintim că o funcție continuă, cu proprietatea N , satisface condiția T_2 (rezultat stabilit de Banach în 1926) deci, în conformitate cu rezultatul pe care tocmai l-am obținut, mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă. Să notăm cu F mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui f . Se știe că mulțimea $D - F$ este de măsură nulă. În virtutea proprietății N a lui f , mulțimea $f(D - F)$ va fi de asemenea de măsură nulă. Rezultă că mulțimea $[m, M] - V$ este de măsură nulă.

Vom mai fructifica o dată teorema lui Stoilow, pentru a obține o întărire a următoarei teoreme date de Minakshisundaram în 1940: Dacă f este continuă și nederivabilă în fiecare punct din $[a, b]$, atunci există o mulțime E de măsură nulă în $[m, M]$, astfel încât, pentru orice $\xi \in [m, M] - E$, mulțimea L_ξ este nevidă, perfectă și nicăieri densă. Iată rezultatul pe care-l vom deduce din teorema lui Stoilow: Dacă valorile pe care o funcție continuă

f le ia în punctele în care derivata există (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă, atunci există o mulțime E de măsură nulă astfel încât, pentru orice $\xi \in [m, M] - E$, mulțimea L_ξ este nevidă, perfectă și nicăieri densă. Într-adevăr, în cazul contrar mulțimea L_ξ ar conține un punct izolat, deci un punct în care ar exista derivata. Însă, conform ipotezei, aceasta este posibil numai pentru o mulțime de măsură nulă de valori ξ . În plus, este evident că pentru orice funcție f continuă mulțimea L_ξ este nicăieri densă, cu excepția unei mulțimi numărabile de valori ξ .

Trei lucruri sînt de observat pe marginea considerațiilor de mai sus :

a) Teorema lui Stoilow a permis o unificare a unor rezultate care altfel apăreau dispartate, sursa lor comună fiind chiar teorema lui Stoilow.

b) În cazul teoremelor lui Banach, Minakshisundaram și cea de a doua teoremă a lui Saks, teorema lui Stoilow nu numai că a permis regăsirea lor, dar a condus la ameliorarea lor sensibilă.

c) De fiecare dată, rezultatele au fost obținute pe o cale rapidă, care contrastează cu demonstrațiile laborioase propuse de autorii teoremelor în cauză, ulterior teoremei lui Stoilow. În fapt, fiecare dintre aceste demonstrații a refăcut, într-un fel sau altul, un raționament sau un fapt care se aflau deja implicate în demersul lui Stoilow.

Dacă mai adăugăm la toate acestea și faptul deja remarcat, că în toate raționamentele de mai sus nu s-a utilizat decît o mică parte din teorema lui Stoilow (cea relativă la punctele izolate ale mulțimilor de nivel), ne dăm seama de impactul ei deosebit asupra teoriei funcțiilor reale.

Această situație m-a determinat în 1958 să propun lui Marius Iosifescu, pe atunci student în ultimul an, astăzi eminent matematician, de a întreprinde un examen critic al întregii situații pe care o prezenta teorema în discuție. Rezultatul obținut de Marius Iosifescu mărește considerabil impactul teoremei lui Stoilow, dîndu-i acesteia o ameliorare pe care nu o putem numi altfel decît teorema Stoilow-Iosifescu și care constă în validitatea teoremei lui Stoilow în ipoteza că funcția în cauză satisface doar proprietatea lui Darboux (se știe că această proprietate este implicată de proprietatea de continuitate, dar nu și reciproc). Mai precis, înlocuind în enunțul teoremei lui Stoilow

cuvîntul *continuu* prin cuvintele *cu proprietatea lui Darboux*, teorema rămîne adevărată. Precizăm însă că avem aici în vedere numai prima parte din teorema lui Stoilow, aceea care se referă la puncte de prima specie și la puncte izolate, nu și partea a doua, care dă condiții suficiente ca o mulțime de nivel să fie finită sau numărabilă. Comportarea acestei ultime părți din teorema lui Stoilow în raport cu înlocuirea proprietății de continuitate cu o proprietate mai generală ar merita să facă obiectul unor investigații ulterioare. Ideea lui Iosifescu constă în a degaja ceea ce el numește *proprietatea (m)*. O funcție f are această proprietate într-un mod unilateral într-un punct x_0 dacă, de o parte a lui x_0 , pe un segment convenabil ales cu o extremitate în x_0 , avem sau numai $f(x) > f(x_0)$, sau numai $f(x) < f(x_0)$. Funcția f are *proprietatea (m)* într-un mod bilateral în x_0 , dacă, de o parte și de alta a lui x_0 , pe segmente convenabil alese cu o extremitate în x_0 avem sau numai $f(x) < f(x_0)$ sau numai $f(x) > f(x_0)$. Se observă ușor că *proprietatea (m)* unilaterală poate avea loc numai în punctele de prima specie ale mulțimilor de nivel, iar *proprietatea (m)* bilaterală numai în punctele izolate ale mulțimilor de nivel. Iosifescu stabilește mai întâi o variantă a teoremei lui Stoilow pentru funcții arbitrare, variantă în care punctele de prima specie în raport cu o mulțime de nivel sînt înlocuite prin puncte cu *proprietatea (m)* în raport cu o astfel de mulțime, iar mulțimea neglijabilă este transferată în intervalul de definiție al funcției. Anume, el arată că oricare ar fi funcția reală f definită pe $[a, b]$ există două mulțimi Z și W de măsură nulă în $[a, b]$ astfel încît în orice punct din $[a, b] - Z$ în care f are *proprietatea (m)* unilaterală există un număr derivat (finit sau infinit) care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - Z$ în care f are *proprietatea (m)* bilaterală există derivată unică (finită sau infinită); în orice punct din $[a, b] - W$ în care f are *proprietatea (m)* unilaterală există un număr derivat finit care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - W$ în care f are *proprietatea (m)* bilaterală există o derivată unică finită. Un caz remarcabil în care are loc *proprietatea (m)* se dovedește a fi tocmai cel al funcțiilor cu *proprietatea lui Darboux*, unde *proprietatea (m)* unilaterală are loc exact în punctele de prima specie în mulțimile lor de nivel, iar *proprietatea (m)* bilaterală are loc exact în punctele izolate

în mulțimile lor de nivel. Faptul acesta îl conduce imediat pe Iosifescu la următoarea teoremă: Fie f o funcție cu proprietatea lui Darboux în $[a, b]$. Există două mulțimi Z și W de măsură nulă, astfel încît: În orice punct din $[a, b] - Z$, de prima specie în mulțimea sa de nivel, există un număr derivat (finit sau infinit) care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - Z$, izolat în mulțimea sa de nivel, există o derivată unică (finită sau infinită); în orice punct din $[a, b] - W$, de prima specie în mulțimea sa de nivel, există un număr derivat finit, care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - W$, izolat în mulțimea sa de nivel, există o derivată unică finită.

Observăm că partea din această teoremă care se referă la mulțimea neglijabilă Z diferă de teorema lui Stoilow doar prin două elemente: continuitatea funcției a fost înlocuită cu proprietatea lui Darboux, iar mulțimea neglijabilă, de măsură nulă, a coborît din mulțimea valorilor în intervalul de definiție al funcției. Lucrurile se desfășoară ca și cum, la întrebarea: Se poate extinde teorema lui Stoilow de la funcții continue la funcții cu proprietatea lui Darboux? obținem răspunsul: Da, cu condiția ca mulțimea neglijabilă să fie transferată în intervalul de definiție. Acest transfer este „plata” care ni se cere, deocamdată, pentru efectuarea extensiunii propuse. Dar pentru această plată obținem, în plus, și o variantă „de finitudine” a teoremei lui Stoilow, o variantă care arată că prin efectuarea transferului în discuție ne putem aranja în așa fel încît toate numerele derivate despre care este vorba în teorema lui Stoilow să fie finite; este exact ceea ce se întîmplă în partea a doua a teoremei lui Iosifescu de mai sus, adică partea care se referă la mulțimea neglijabilă W .

Să ne permitem o mică digresiune și să considerăm cazul particular al unei funcții cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulțimi de nivel sînt, toate, discrete. Aceasta înseamnă că orice punct din $[a, b]$ este izolat în mulțimea sa de nivel, deci, conform teoremei de mai sus (ultima parte relativă la mulțimea neglijabilă W), funcția considerată este derivabilă aproape peste tot. Se regăsește astfel o teoremă dată de A. Marchaud, în 1933, pentru funcții continue, și extinsă de noi, în 1957, la funcții cu proprietatea lui Darboux. Dar, după cum arată Marius

Iosifescu, rezultatul nostru poate fi la rîndul său ameliorat, observîndu-se că mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulțimi de nivel sînt discrete, nu este doar de măsură nulă, ci chiar numărabilă. Un rol esențial în stabilirea acestui fapt îl joacă faptul că o funcție cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulțimi de nivel sînt discrete, are în orice punct proprietatea (m) bilaterală.

Sîntem acum în măsură să prezentăm extensiunea lui Iosifescu a teoremei lui Stoilow, adică 'să arătăm că acel preț pe care l-am plătit pentru a putea înlocui în enunțul teoremei lui Stoilow cuvintele „funcție continuă” prin „funcție cu proprietatea lui Darboux” nu este obligatoriu. Cu alte cuvinte, referindu-ne la funcții cu proprietatea lui Darboux, putem aduce mulțimea neglijabilă de măsură nulă înapoi în mulțimea valorilor funcției, fără a afecta celelalte prevederi din teorema lui Stoilow. Vom vedea totuși că ceva se pierde; partea „de finitudine”, relativă la mulțimea neglijabilă W , nu va mai putea fi salvată prin readucerea mulțimii neglijabile în mulțimea valorilor funcției.

Vom avea mai întîi nevoie de o lemă: Dacă φ este o funcție monotonă pe $[a, b]$, iar N_φ este mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care φ nu admite derivată (finită sau infinită), atunci măsura Lebesgue a mulțimii $\varphi(N_\varphi)$ este egală cu zero. Pentru demonstrație, să observăm mai întîi că este suficient să ne referim la funcții strict monotone — de exemplu, strict crescătoare. Într-adevăr, dacă φ ar fi crescătoare într-un mod nestrict, funcția ψ dată de $\psi(x) = \varphi(x) + x$ ar fi strict crescătoare și, admițînd că lema a fost stabilită în acest din urmă caz, ar rezulta că $\mu(\psi(N_\psi)) = 0$ (prin μ notăm măsura Lebesgue). Însă $N_\psi = N_\varphi$ și $\psi(x_2) - \psi(x_1) > \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ pentru $x_2 > x_1$, deci $\mu(\varphi(N_\varphi)) = 0$. Rămîne deci să stabilim lema pentru φ strict crescătoare. Notînd cu φ^{-1} inversa lui φ , definită pe $\varphi([a, b])$, avem $N_{\varphi^{-1}} \supseteq \varphi(N_\varphi)$ (convenim ca punctele din $\varphi([a, b])$ în care mulțimea $\varphi([a, b])$ nu se acumulează bilateral să fie considerate puncte în care φ^{-1} nu admite derivată — finită sau infinită; mulțimea acestor puncte este cel mult numărabilă). Însă φ^{-1} este și ea monotonă, deci $\mu(N_{\varphi^{-1}}) = 0$ (în virtutea teoremei lui Lebesgue), deci cu atît mai mult, în baza incluziunii de mai sus, avem $\mu(\varphi(N_\varphi)) = 0$ și lema este complet demonstrată.

Pentru a obține acum extensiunea lui Iosifescu a teoremei lui Stoilow vom mai avea nevoie de o noțiune: aceea de traiectorie monotonă asociată unei funcții f într-un punct rațional r din intervalul ei de definiție. Asociind lui f în r funcțiile

$$f^+(x) = \sup_{y \in [r, x]} f(y) \quad \text{pentru } r \leq x < b;$$

$$f_+(x) = \inf_{y \in [r, x]} f(y) \quad \text{pentru } r \leq x < b;$$

$$f^-(x) = \sup_{y \in [x, r]} f(y) \quad \text{pentru } a < x \leq r;$$

$$f_-(x) = \inf_{y \in [x, r]} f(y) \quad \text{pentru } a < x \leq r,$$

vom numi aceste funcții (evident monotone: prima și a treia monoton crescătoare, iar a doua și a patra monoton descrescătoare) *traiectoriile monotone asociate funcției f în punctul rațional r* . Deoarece mulțimea punctelor raționale din $[a, b]$ este numărabilă, rezultă că oricărei funcții i se asociază o familie numărabilă de traiectorii monotone.

Analiza întreprinsă de Iosifescu arată că mulțimea neglijabilă Z din teorema sa de mai sus relativă la funcții cu proprietatea lui Darboux se obține ca reuniune a mulțimii E_f a punctelor de extremum strict ale lui f (mulțime care este totdeauna cel mult numărabilă) și reuniunea numărabilă a mulțimilor N_i ($i = 1, 2, \dots$) definite în modul următor: notînd cu $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ șirul numerelor raționale din $[a, b]$, N_i este mulțimea tuturor punctelor din $[a, b]$ în care cel puțin una dintre traiectoriile monotone asociate lui f în r_i nu admite derivată unică — finită sau infinită. Folosind mereu teorema lui Lebesgue asupra derivabilității funcțiilor monotone, rezultă că fiecare mulțime N_i este de măsură nulă, deci Z este de măsură nulă; avem $Z = E_f \cup N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_i \cup \dots$. Mulțimea $f(E_f)$ este cel mult numărabilă, deoarece E_f este cel mult numărabilă. Fiecare dintre mulțimile N_i este reuniunea a patru mulțimi $N^+(i)$, $N_+(i)$, $N^-(i)$ și $N_-(i)$, unde $N^+(i)$ este mulțimea punctelor în care traiectoria f^+ care trece prin r_i nu admite derivată unică, $N_+(i)$ este mulțimea punctelor în care traiectoria f_+ care trece prin r_i nu admite derivată unică, iar $N^-(i)$ și $N_-(i)$ sînt mulțimile de același fel asociate traiectoriilor monotone f^- și f_- . În virtutea lemei stabilite mai sus, mulțimile $f^+(N^+(i))$, $f_+(N_+(i))$,

$f^-(N^-(i))$ și $f_-(N_-(i))$ sînt de măsură nulă pentru orice i . Notînd cu $M_i(f)$ reuniunea lor și punînd $M(f) = \bigcup M_i(f)$ pentru i mergînd de la 1 la infinit vom observa că $M(f)$, ca reuniune numărabilă de mulțimi de măsură nulă, este tot o mulțime de măsură nulă.

Fie acum Z_1 acea parte din mulțimea Z care este formată din puncte care, în mulțimile lor de nivel, sînt puncte de prima specie. Spre deosebire de funcțiile continue (care nu-s constante în nici un interval), la care mulțimile de nivel, fiind mulțimi frontieră închise, conțin obligatoriu puncte de prima specie, la funcții cu proprietatea lui Darboux această situație nu mai are loc; o mulțime de nivel poate să conțină sau nu puncte de prima specie, existînd chiar cazuri în care astfel de puncte lipsesc din orice mulțime de nivel. (Se știe, de exemplu, că există funcții care iau în orice interval orice valoare reală; astfel de funcții au, evident, proprietatea lui Darboux, dar fiecare mulțime de nivel este peste tot densă pe R , deci nu conține decît puncte de a doua specie.) Vom arăta că $f(Z_1)$ este de măsură nulă. În acest scop, va fi suficient să arătăm că $f(Z_1) \subseteq f(E_f) \cup M(f)$, deoarece am văzut că fiecare termen din membrul al doilea este o mulțime de măsură nulă. Fie deci o valoare t din $f(Z_1)$ care nu este în $f(E_f)$. În mulțimea de nivel t există deci un punct $x \in Z_1$, de prima specie. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că x este un punct de prima specie la stînga, cu alte cuvinte, există un interval $[r_j, x]$ (r_j rațional) a cărui intersecție cu mulțimea de nivel t este formată numai din punctul x . Rezultă de aici că

$$\sup_{y \in [r_j, x]} f(y) = \inf_{y \in [r_j, x]} f(y) = f(x),$$

cu alte cuvinte,

$$f_j^+(x) = f_j^-(x) = f(x) = t,$$

deci, ținînd seama că $x \in Z_1 - E_f$, rezultă existența unui i pentru care $x \in N_i$, deci pentru care $f_j^+(x)$, adică t , aparține lui $M_i(f)$, adică lui $M(f)$.

Acum, totul este pregătit pentru obținerea rapidă a teoremei Stoilow-Iosifescu, deoarece Z este chiar mulțimea excepțională, neglijabilă, din teorema relativă la proprietatea (m). Fie o valoare t care nu aparține mulțimii

$A = f(Z_1)$. Dacă în mulțimea $L_t = \{x; f(x) = t\}$ nu există nici un punct de prima specie, atunci ea nu ne interesează. Dacă un astfel de punct x există în L_t , el nu va putea aparține lui Z , căci, în acest caz, el ar aparține chiar lui Z_1 , deci $f(x) = t$ ar aparține lui $f(Z_1)$, contrar ipotezei. Rezultă că x este un punct de prima specie care lipsește din Z . Însă în astfel de puncte este satisfăcută proprietatea (m) — unilaterală sau bilaterală (să nu uităm că funcția f are proprietatea lui Darboux!) și, conform teoremei relative la proprietatea (m) , există un număr derivat — finit sau infinit — care este egal cu numărul derivat opus, iar dacă proprietatea (m) este satisfăcută bilateral — deci dacă punctul x este izolat în L_t — există derivată unică — finită sau infinită.

Extensiunea teoremei lui Stoilow la funcții cu proprietatea lui Darboux este astfel complet stabilită. Trebuie să observăm că deducerea ei din lema privind funcțiile monotone și din teorema relativă la proprietatea (m) a cerut un anumit efort, care nu este explicitat de către Iosifescu, dar al cărui rezultat a fost corect intuit de către acesta. Pentru multe funcții cu proprietatea lui Darboux, extensiunea în discuție este lipsită de obiect, deoarece funcțiile în cauză nu admit puncte de prima specie în mulțimile lor de nivel. Dar chiar dacă astfel de puncte există, numai dacă mulțimea valorilor luate în aceste puncte nu formează o mulțime de măsură nulă, extensiunea teoremei lui Stoilow devine efectiv aplicabilă. Iosifescu observă că această situație netrivială de aplicare a extensiunii teoremei lui Stoilow apare chiar la unele funcții derivate. Ar fi interesant să se stabilească dacă există derivate ale lui Pompeiu sau ale lui Köpcke care să facă obiectul unei aplicări netriviale a acestei extensiuni.

Cele două teoreme privind transpunerea teoremei lui Stoilow la funcții cu proprietatea lui Darboux se deosebesc prin poziția mulțimii excepționale: în domeniul de definiție al funcției, în prima teoremă; în domeniul valorilor, în a doua. Dar ținând seama de faptul că mulțimea excepțională din a doua teoremă nu este decît imaginea, prin f , a mulțimii excepționale din prima teoremă, obținem un rezultat mai puternic, care cumulează cele două teoreme în discuție:

Fiind dată o funcție reală f cu proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$, există o mulțime Z de măsură nulă în $[a, b]$, a cărei

image $f(Z)$ este de asemenea de măsură nulă, astfel încât în orice punct x care lipsește din Z sau pentru care $f(x)$ lipsește din $f(Z)$ are loc următoarea situație: Dacă x este de prima specie în mulțimea sa de nivel, atunci există în x un număr derivat — finit sau infinit — care este egal cu numărul derivat opus; dacă x este un punct izolat în mulțimea sa de nivel, există în x o derivată unică — finită sau infinită.

Există însă și o deosebire importantă între cazul în care mulțimea excepțională este plasată în intervalul de definiție și cazul în care această mulțime este plasată în intervalul valorilor funcției. În timp ce în primul caz are loc și o variantă „finită” (obținută prin ștergerea cuvintelor „sau infinit” din teorema inițială), în cazul al doilea această variantă „finită” nu este posibilă. Pentru a demonstra acest fapt, este suficient să considerăm o derivată Pompeiu mărginită, pentru care mulțimea zerourilor este de măsură strict pozitivă (pentru definiția derivatei lui Pompeiu și pentru posibilitatea ca zerourile ei să formeze o mulțime de măsură pozitivă, a se vedea capitolul relativ la Pompeiu).

Vom trece acum să culegem noi fructe ale teoremei lui Stoilow, lucru posibil datorită rezultatelor obținute de Iosifescu în lărgirea cadrului acestei teoreme. Vom urma, în esență, ideile lui Iosifescu („Revue de math. pures et appl.”, 1959, no.3 și no.4).

Am semnalat mai sus că Stoilow a desprins, drept consecință a teoremei sale, teorema lui Denjoy din 1915, relativă la situația numerelor derivate ale unei funcții continue. Însă această teoremă a lui Denjoy a primit diferite extensiuni, care au culminat cu aceea dată de Saks pentru funcții arbitrare. Această extensiune, cunoscută sub numele de teorema lui Denjoy-Young-Saks, are enunțul următor: Fiind dată o funcție reală f definită pe $[a,b]$, există o mulțime E de măsură nulă, astfel încât, în orice x din $[a,b] - E$, două numere derivate opuse sînt sau simultan finite și egale, sau simultan infinite și inegale, numărul derivat superior fiind egal cu $+\infty$. Se știe că de aici (vezi vol. II din *Analiza matematică* de Miron Nicolescu, p.34 și cap.IX, Derivata) rezultă că în orice punct din $[a,b] - E$ două numere derivate asociate sînt sau diferite și atunci unul cel puțin este infinit sau egale și finite.

Pentru demonstrație, vom observa mai întâi că mulțimea punctelor în care o funcție f admite derivată unilaterală infinită este de măsură nulă. Într-adevăr, este suficient

să observăm că, într-un punct în care f admite derivată unilaterală infinită, ea posedă proprietatea (m) cel puțin unilateral, rămânând apoi să se aplice acea parte din teorema relativă la proprietatea (m) care se referă la mulțimea excepțională W .

Să notăm cu E_n mulțimea acelor puncte din $[a, b]$ în care un număr derivat al lui f , de exemplu D^+ , este finit și inferior numărului natural n . Vom arăta că avem $D^+ = D_-$ aproape peste tot în E_n . Fie f_n dată de $f_n(x) = f(x) - nx$. Pentru $x \in E_n$, avem $D^+f_n(x) = D^+f(x) - n < 0$, deci f_n posedă proprietatea (m) cel puțin la dreapta lui x . Folosind din nou partea relativă la W din teorema despre proprietatea (m) (aici trebuie explicitată partea relativă la puncte cu proprietatea (m) unilaterală din demonstrația acestei teoreme), rezultă că avem aproape peste tot în E_n relația $D^+f_n(x) = D^-f_n(x)$, deci $D^+f(x) = D^-f(x)$. Pentru $n \rightarrow \infty$ se obține faptul că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de puncte, un număr derivat finit este egal cu numărul derivat opus. De aici și din observația relativă la mulțimea punctelor în care o funcție admite derivată unilaterală infinită rezultă imediat teorema lui Denjoy-Young-Saks.

Prin eleganța și simplitatea ei, demonstrația dată de Iosifescu acestei teoreme merită să intre în orice manual de analiză matematică, cu atît mai mult cu cît trunchiul din care ea s-a desprins — teorema lui Stoilow — prezintă un interes în sine, ca matrice a unui mare număr de fapte matematice care, din păcate, nu-și mai găsesc loc în manualele universitare.

Vom trece acum la consecințele teoremei Stoilow-Iosifescu. Iată mai întîi două teoreme din tratatul clasic al lui Saks privind teoria integralei, care se regăsesc pe această cale:

A. Dacă E este o mulțime de măsură nulă din $[a, b]$ iar f admite în fiecare punct din E derivată finită, atunci $f(E)$ este de măsură nulă.

B. Dacă E este o mulțime din $[a, b]$, iar derivata lui f există și este egală cu zero în orice punct din E , atunci $f(E)$ este de măsură nulă.

Aceste rezultate sînt consecințe directe ale următoarei leme a lui Iosifescu: Dacă numerele derivate la dreapta ale unei funcții f sînt, în punctele unei mulțimi E , mărginite de o constantă M , atunci măsura exterioară a mulțimii

$f(E)$ nu întrece produsul dintre $2M$ și măsura exterioară a lui E .

Propoziția B de mai sus dă posibilitatea să se obțină, drept consecințe ale teoremei Stoilow-Iosifescu, următoarele două teoreme.

Teorema 1. *Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ și fie m și M marginile lui f pe $[a,b]$. Fie D mulțimea punctelor din $[a,b]$ în care f admite derivată unică — finită sau infinită. În aceste condiții, mulțimea $[m,M] - f(D)$ este de măsură nulă dacă și numai dacă pentru aproape orice t în $[m,M]$ mulțimea L_t de nivel t conține un punct izolat.*

Demonstrație. Suficiența condiției este o consecință directă a teoremei Stoilow-Iosifescu. Rămîne să stabilim necesitatea condiției. În acest scop, să presupunem, prin reducere la absurd, că există o mulțime E de măsură exterioară pozitivă, astfel încît pentru $t \in E$ nivelul L_t este dens în sine. Dacă într-un punct al unui astfel de nivel există derivata lui f , ea este obligatoriu egală cu zero și, în virtutea propoziției B de mai sus, ar trebui ca E să fie de măsură nulă, în contradicție cu ipoteza raționamentului prin reducere la absurd. Rezultă că există o parte $F \subseteq [m,M]$ de măsură exterioară pozitivă, astfel încît pentru orice t în F mulțimea de nivel L_t nu conține nici un punct de diferențiabilitate a lui f , ceea ce este iarăși contradictoriu.

Teorema 2. *Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$. Pentru ca mulțimea valorilor pe care f le ia în punctele în care există derivată (finită sau infinită) să fie de măsură nulă este necesar și suficient ca pentru aproape orice t în $[m,M]$ mulțimea de nivel L_t să fie densă în sine.*

Demonstrație. Suficiența condiției rezultă din propoziția B de mai sus, dacă se ține seamă că într-un punct dintr-o mulțime de nivel densă în sine derivata — dacă există — este obligatoriu nulă. Pentru a stabili necesitatea condiției, să observăm că, dacă ar exista o mulțime de măsură exterioară pozitivă de valori t pentru care L_t conține puncte izolate, atunci din teorema Stoilow-Iosifescu ar rezulta că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de valori t , în toate aceste puncte izolate ar exista derivată unică, în contrast cu ipoteza că mulțimea valorilor în punctele cu derivată unică este de măsură nulă.

Să observăm că partea din teorema 2 care se referă la necesitatea condiției generalizează teorema lui Minakshisundaram despre care am vorbit în prima parte a acestui capitol și pe care am regăsit-o, la momentul respectiv, cu ajutorul teoremei lui Stoilow.

Din teorema lui Minakshisundaram rezultă că aproape toate mulțimile de nivel ale unei funcții continue, dar nederivabile în nici un punct, sînt mulțimi perfecte. Iosifescu a pus problema existenței unei funcții continue neconstante, ale cărei mulțimi de nivel sînt, toate, perfecte. Răspunsul afirmativ la această problemă a fost dat de Paul Erdős.

Cu ajutorul teoremei 2 și al propozițiilor A și B de mai sus, Iosifescu a mai stabilit și următoarea teoremă, pe care o reproducem aici fără demonstrație:

Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ și fie m și M marginile lui f pe $[a, b]$. Să presupunem că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de valori t , fiecare mulțime de nivel L_t conține un punct izolat. Să mai presupunem că valorile pe care f le ia în punctele în care derivata lui f există și este infinită formează o mulțime a cărei complementară în raport cu $[m, M]$ nu este de măsură nulă. În aceste condiții, punctele în care derivata lui f nu se anulează formează o mulțime de măsură strict pozitivă.

Se poate observa că în cazul particular al funcțiilor continue se regăsește faptul, deja prezentat la începutul acestui capitol (tot ca o consecință a teoremei lui Stoilow), conform căruia proprietatea (N) a lui Luzin implică pozitivitatea măsurii mulțimii punctelor în care derivata există și nu se anulează și faptul că complementara mulțimii $f(D)$ este de măsură nulă.

Este interesant de observat că unele extensiuni prilejuite de teorema Stoilow-Iosifescu rămîn fără obiect. Așa se întîmplă cu o parte din teorema lui Saks privind condiția T_1 a lui Banach, teoremă pe care am obținut-o ca o consecință a teoremei lui Stoilow. Cu aceeași demonstrație, dar prevalîndu-ne de teorema Stoilow-Iosifescu, se obține următorul rezultat: Pentru ca o funcție cu proprietatea lui Darboux să îndeplinească condiția T_1 este necesar ca valorile luate în punctele în care nu există derivată (finită sau infinită) să formeze o mulțime de măsură nulă. Progresul acestui rezultat în raport cu teorema lui Saks este real în măsura în care există funcții discontinue care au proprietatea lui Darboux și îndeplinesc condiția T_1 . Însă

astfel de funcții nu pot exista, deoarece la o funcție Darboux care admite discontinuități valorile luate de o infinitate de ori formează o mulțime care conține un interval, fapt incompatibil cu proprietatea T_1 .

Cel care a dus mai departe rezultatele noastre și ale lui Iosifescu privind teorema lui Stoilow este matematicianul indian (actualmente lucrând la Universitatea Alberta din Edmonton, Canada) Krishna Murari Garg („Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae”, 1963). Vom expune, în cele ce urmează, ideile sale.

Fie f o funcție reală definită în intervalul I . Să notăm cu $Y_\alpha(f)$ ($\alpha = i, d, p, f, \infty, e, u, c$) mulțimea valorilor $t \in f(I)$ pentru care mulțimile de nivel $L_t = \{x; x \in I, f(x) = t\}$ sînt izolate, respectiv dense în sine, perfecte, finite, infinite, numărabile, nenumărabile sau de puterea continuului. Garg arată mai întîi că există o mulțime $Y \subseteq f(I)$ astfel încît

$$\mu(f(I) - Y) = 0 \quad (1)$$

(unde prin μ am notat măsura Lebesgue) și, pentru orice $t \in Y$, $f^{-1}(t)$ este nenumărabilă numai dacă conține un punct în care

$$D^+f = D^-f = +\infty, D_+f = D_-f = -\infty \quad (2)$$

(prin D , cu exponenții și indicii respectivi, reprezentînd, ca de obicei, numerele derivate ale lui f).

Fie K mulțimea punctelor din I în care este satisfăcută relația (2). Avem $Y \cap Y_u(f) \subseteq f(K)$, deci $Y_u(f) - f(K) \subseteq f(I) - Y$. De aici, în baza relației (1), se obține

$$\mu(Y_u(f) - f(K)) = 0. \quad (3)$$

Am demonstrat astfel:

Teorema lui Garg pentru funcții arbitrare. Fie f o funcție reală definită pe I și fie K mulțimea punctelor în care au loc relațiile (2). În aceste condiții, mulțimea $Y_u(f) - f(K)$ este de măsură nulă. (În cazul în care f este boreliană, mulțimea $Y_u(f)$ este analitică în sensul lui Luzin-Suslin, așa cum rezultă dintr-o teoremă a lui S. Braun din „Fundamenta Mathematicae”, 1933, deci măsurabilă Lebesgue și obținem că măsura lui $Y_u(f)$ nu întrece măsura interioară a lui $f(K)$).

Corolar 1. O funcție reală f îndeplinește condiția T_2 a lui Banach dacă valorile pe care f le ia în punctele în care

numerele derivate superioare sînt egale cu $+\infty$, iar numerele derivate inferioare sînt egale cu $-\infty$ formează o mulțime de măsură nulă. (Amintim că o funcție are proprietatea T_2 dacă valorile pe care ea le ia de o infinitate nenumărabilă de ori formează o mulțime de măsură nulă.)

Să presupunem acum că f satisface proprietatea lui Darboux pe I . Se poate arăta că există o mulțime $Y \subseteq f(I)$ cu proprietatea (1) și astfel încît, pentru orice $t \in Y$, un punct x din $f^{-1}(t)$ este izolat dacă și numai dacă f este derivabilă în x . Notînd, ca și pînă acum, cu D mulțimea punctelor din I în care f are o derivată unică — finită sau infinită — și punînd $N = I - D$, vom avea, pentru orice $t \in Y$:

(i) $f^{-1}(t)$ este izolată dacă și numai dacă $f^{-1}(t) \in D$
și

(ii) $f^{-1}(t)$ este densă în sine dacă și numai dacă $f^{-1}(t) \subseteq N$.

Avem deci

$$Y \cap Y_i(f) = Y - f(N) \quad (4)$$

și

$$Y \cap Y_d(f) = Y - f(D). \quad (5)$$

Deoarece o mulțime de nivel care nu este izolată este obligatoriu infinită, relația (4) implică incluziunea

$$Y \cap f(N) \subseteq Y_\infty(f). \quad (6)$$

Din relațiile (1), (4), (5) și (6) rezultă

Teorema lui Garg pentru funcții cu proprietatea lui Darboux. *Fie f o funcție reală cu proprietatea lui Darboux pe I . Avem*

$$Y_i(f) \sim f(I) - f(N) \quad (a)$$

$$Y_d(f) \sim f(I) - f(D) \quad (b)$$

și

$$\mu(f(N) - Y_\infty(f)) = 0, \quad (c)$$

unde $A \sim B$ dacă $A = (B - E_1) \cup E_2$, E_1 și E_2 fiind mulțimi de măsură nulă. (În cazul în care f este boreliană, mulțimea $Y_d(f)$ este analitică în sensul lui Luzin-Suslin,

în virtutea unui rezultat al lui S. Braun, loc. cit., deci este măsurabilă Lebesgue. Rezultă de aici că $f(D)$ este măsurabilă, fiind similară mulțimii $f(I) - Y_d(f)$.

Din (a) se deduce:

Corolar 2. Valorile pe care o funcție f cu proprietatea lui Darboux le ia în punctele în care nu are derivată (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă dacă și numai dacă mulțimea de nivel t este izolată pentru aproape orice t din $f(I)$.

Din (b) se deduce:

Corolar 3. Valorile pe care o funcție f cu proprietatea lui Darboux în I le ia în punctele în care există derivata f' (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă dacă și numai dacă mulțimea de nivel t este densă în sine pentru aproape orice t din $f(I)$.

Rezultă de asemenea din (b) că mulțimea $f(I) - f(D)$ este de măsură nulă dacă și numai dacă $Y_d(f)$ este de măsură nulă, cu alte cuvinte, dacă și numai dacă aproape fiecare mulțime de nivel a lui f conține un punct izolat. Avem deci:

Corolar 4. Fie f cu proprietatea lui Darboux pe I . Complementara mulțimii valorilor luate de f în punctele în care există f' (finită sau infinită) este de măsură nulă dacă și numai dacă pentru aproape orice t din $f(I)$ mulțimea de nivel t conține un punct izolat.

În cazul în care f satisface, în plus, condiția T_1 a lui Banach, $Y_\infty(f)$ este de măsură nulă, deci, în baza proprietății (c), rezultă că $f(N)$ este de măsură nulă. Așadar:

Corolar 5. O funcție reală f cu proprietatea lui Darboux pe I îndeplinește condiția T_1 numai dacă valorile luate de f în punctele în care ea nu are derivată (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă.

Observăm că atât corolarul 3, cât și corolarul 4 regăsesc rezultate ale lui Iosifescu relative la punctele izolate în mulțimile lor de nivel. Mai precis, corolarul 3 coincide cu teorema 2, iar corolarul 4 coincide cu teorema 1. În ceea ce privește corolarul 5, el coincide cu acel exemplu de extensiune pe care am calificat-o mai sus ca fiind lipsită de obiect.

Se pare însă că Garg nu a observat că singurul caz în care se poate realiza condiția stipulată în enunțul corolarului 5 este acela în care funcția considerată este con-

tinuă; dar în această formă rezultatul a fost deja obținut din teorema lui Stoilow pentru funcții continue.

Faptul remarcabil în punctul de vedere al lui Garg este plasarea unei părți importante din teorema lui Stoilow în contextul unor fapte privind funcțiile *arbitrare*. Roadele se văd chiar în consecințele acestui punct de vedere în cazul particular al funcțiilor continue, caz în care se obține o teoremă care furnizează o informație foarte bogată în ceea ce privește măsura mulțimilor $Y_\infty(f)$. Mai întâi să observăm că din continuitatea lui f rezultă egalitățile

$$Y_i(f) = Y_f(f), \quad Y_d(f) = Y_p(f), \quad Y_u(f) = Y_e(f), \quad (7)$$

deci este suficient să se considere mulțimile $Y_f(f)$, $Y_\infty(f)$, $Y_e(f)$, $Y_u(f)$ și $Y_p(f)$. Se verifică ușor că, datorită continuității lui f , aceste mulțimi sînt măsurabile. Mai precis, are loc următoarea teoremă, pe care o reproducem fără demonstrație:

Teorema lui Garg pentru funcții continue. *Fie f continuă pe I . Cu notațiile deja introduse, avem egalitățile:*

$$\mu(Y_f(f)) = \mu(f(I)) - \mu(f(N)), \quad \mu(Y_\infty(f)) = \mu(f(N)),$$

$$\mu(Y_p(f)) = \mu(f(I)) - \mu(f(D)), \quad \mu(Y_u(f)) \leq \mu_i(f(K))$$

și

$$\mu(f(D) \cap f(N)) - \mu_i(f(D) \cap f(K)) \leq \mu(Y_e(f)) \leq \mu(f(D) \cap f(N)).$$

(Prin μ_i și μ_e am notat măsura interioară și măsura exterioară.)

Printre numeroasele consecințe ale acestei teoreme figurează și următoarele rezultate pe care le-am obținut, în prima parte a acestui capitol, cu ajutorul teoremei lui Stoilow:

Dacă f este continuă și îndeplinește condiția T_2 , atunci $\mu(f(D)) = \mu(f(I))$;

Dacă f este continuă și îndeplinește în I condiția N a lui Luzin, atunci $\mu(f(D^*)) = \mu(f(I))$, unde D^* este mulțimea punctelor în care f admite derivată finită;

Dacă f este continuă pe I , iar valorile pe care f le ia în punctele în care există derivată (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă, atunci pentru aproape orice t din $f(I)$ mulțimea de nivel t este perfectă, rară și nevidă.

*

Acesta este doar o parte din itinerariul teoremei lui Stoilow, o teoremă care peste treizeci de ani a trecut neobservată, dar ale cărei consecințe impun prezența ei în orice expunere a teoriei moderne a derivării. Articole de sinteză ca cel al lui A. M. Bruckner și J. G. Ceder din 1965, asupra proprietății lui Darboux (în „Sonderdruck aus Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung”) și cel al lui A. M. Bruckner și J. L. Leonard din 1966, asupra derivatelor (în „American Mathematical Monthly”, Part II) consemnează rezultatele lui Stoilow, *prin intermediul extensiunilor și ameliorărilor obținute de cei care au venit după Stoilow*. Dar, chiar prin acest fapt, numele lui Stoilow devine din ce în ce mai puțin asociat de niște rezultate care, în ideea lor fundamentală, îi aparțin. Este de datoria istoriei științei de a-i restitui ce i se cuvine.

Cel pe care Georges Bouligand îl numise rege al potențialului, iar Lebesgue și Luzin îl citaseră în două monografii celebre (primul, în monografia sa asupra integrării, iar al doilea în monografia sa asupra mulțimilor analitice) a publicat în 1927, în „Bull. mathém. de la Société roumaine des Sciences,” o notă căreia probabil nu i-a acordat o deosebită însemnătate și care multă vreme nu a atras atenția nimănui (această notă constituie singurul articol de cercetare pe care Florin Vasilescu l-a publicat în limba română; pe toate celelalte, după obiceiul timpului, le-a publicat în limba franceză și, cîteva, în engleză). Și totuși, această notă conținea un rezultat remarcabil, privind rolul proprietății de continuitate în structura funcțiilor reale arbitrare.

Pînă la Vasilescu, se cunoștea un singur rezultat de acest fel, datorit lui Henri Blumberg (rezultat la care ne referim și într-un alt capitol al acestei cărți): Orice funcție reală definită pe $[a, b]$ admite o restricție continuă pe o mulțime peste tot densă în $[a, b]$. Rezultatul lui Blumberg arăta că, pînă la un anumit punct, proprietatea de continuitate este implicată în însăși noțiunea de funcție reală de o variabilă reală. Numeroși matematicieni au mers pe urmele acestui rezultat, căutînd să-i fixeze cadrul cel mai larg de valabilitate și, pe cît posibil, să-l amelioreze. O întrebare însă rămînea fără răspuns: Dacă, într-adevăr, proprietatea de continuitate este atît de intim implicată în structura oricărei funcții reale de o variabilă reală, de ce nu se face simțit acest fapt într-un mod mai direct, în posibilitatea de a aproxima funcțiile reale arbitrare cu ajutorul funcțiilor continue? De ce nu se obțin niște teoreme care, prin adoptarea unei convergențe adecvate și a unor mulțimi neglijabile corespunzătoare, să dea o

reprezentare a funcțiilor arbitrare ca limite de funcții continue?

Teorema lui Vasilescu este, în ordine cronologică, prima teoremă care aduce un răspuns la întrebările de mai sus. Este remarcabil faptul că această teoremă conservă noțiunea clasică de convergență și recurge la un tip de mulțime excepțională care face să intervină nemijlocit structura funcției care se aproximează: această mulțime excepțională, de puncte în care eventual nu are loc reprezentarea funcției date f ca limită de funcții continue, este mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f . În același timp, teorema lui Vasilescu este primul rezultat obținut de un matematician român, în ceea ce privește găsirea unor proprietăți aparținând tuturor funcțiilor reale de o variabilă reală. Iată care este enunțul ei:

Fiind dată o funcție reală f definită pe $[a,b]$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe $[a,b]$, astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

pentru orice x din $[a,b]$ în care f este continuă.

La prima vedere, acest enunț pare derutant, deoarece interesul ei este condiționat de existența unor puncte de continuitate ale lui f (altfel, teorema ar fi lipsită de obiect), existență care, evident, nu este asigurată pentru orice funcție reală de o variabilă reală. La această situație se mai adaugă și faptul că demonstrația dată de către Florin Vasilescu folosește unele noțiuni și rezultate din teoria funcțiilor multiforme, teorie pe care chiar el a elaborat-o în teza sa susținută la Paris în 1925. Deoarece în enunțul teoremei lui Vasilescu nu apare nici o referire la funcții multiforme, reobținerea acestei teoreme pe o cale directă, deci care să evite orice referire la funcții multiforme, se impunea. Am propus această problemă tînărului și talentatului matematician Ionel Țevy. Acesta, nu numai că a reușit să obțină o demonstrație directă a rezultatului lui Florin Vasilescu, dar a identificat semnificația ei profundă, care rezultă din unele teoreme depinzînd de clasa boreliană n , teoreme față de care rezultatul lui Vasilescu constituie prima treaptă, aceea corespunzătoare lui $n = 0$. Am în vedere faptul că Ionel Țevy a reușit să rezolve și o altă problemă pe care i-am propus-o, aceea de a găsi corespondentul teoremei lui Vasilescu la funcții boreliene, la funcții măsurabile și la funcții cu proprietatea lui Baire

Înainte de a expune ideile lui Ionel Tevy, idei care dau teoremei lui Vasilescu întreaga amploare pe care aceasta o merita, prin dezvăluirea faptului că ea ascunde o clasă de fenomene legate de aproximarea unei funcții prin funcții mai particulare, vom evoca unele fapte matematice din deceniul al treilea al secolului nostru, fapte corelate într-un fel oarecare cu teorema în discuție.

Perioada la care ne referim a adus în atenția lumii matematice câteva rezultate care dezvăluiau cât de intim este implicată proprietatea de continuitate în structura unei funcții reale arbitrare, de o variabilă reală. După cum am arătat mai sus, primul rezultat de acest fel a fost obținut de Blumberg (în 1922, într-un articol publicat în „Transactions of the American Mathematical Society”). Mult mai târziu, în 1944 (în „Duke Mathematical Journal”), Blumberg a reușit să arate că orice transformare a spațiului euclidian m -dimensional în spațiul euclidian n -dimensional admite o restricție continuă pe o mulțime densă, iar alți autori, ca C. Goffman, au extins teorema la anumite clase de spații metrice. Devenea astfel clar, cum era de altfel de așteptat, că teorema lui Blumberg nu este specifică dreptei reale. Teorema lui Vasilescu inaugurează un alt ciclu de rezultate, în cadrul cărora procesul de trecere la limită pune în legătură funcțiile arbitrare cu cele continue. Dacă la Vasilescu teritoriul de desfășurare a acestui proces este dreapta numerică, ulterior, după cum vom vedea, și aici cadrul a fost extins, căpătînd chiar o generalitate mai mare decît în cazul teoremei lui Blumberg. Este, poate, interesant să semnalăm că la un an după publicarea teoremei lui Vasilescu, teoremă rămasă multă vreme necunoscută lumii matematice, marele matematician polonez Waclaw Sierpiński a publicat (în periodicul polonez „Fundamenta Mathematicae”) o nouă teoremă de aproximare a funcțiilor reale arbitrare, de o variabilă reală, prin funcții continue (de fapt, chiar prin polinoame; dar datorită teoremei lui Weierstrass, orice teoremă de aproximare prin funcții continue devine, în mod automat, și o teoremă de aproximare prin polinoame). Iată enunțul ei: Fiind date o funcție reală f definită pe $[a, b]$ și un număr pozitiv ε , există un polinom $P(x)$ și o mulțime $E \subset [a, b]$, de măsură interioară Lebesgue mai mică decît ε , astfel încît, pentru orice $x \in [a, b] - E$, avem $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$. Tot în 1928, Saks și Sierpiński arată (în „Fundamenta

Mathematicae”) că orice funcție reală f pe $[a,b]$ poate fi aproximată oricât de bine cu o funcție φ de a doua clasă Baire, dacă sacrificăm o mulțime de măsură interioară egală cu zero. Cu alte cuvinte, fiind dat $\varepsilon > 0$, există o mulțime F de măsură interioară egală cu zero, astfel încât, pentru orice x din $[a,b] - F$ avem $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Micșorînd deci pretențiile asupra funcțiilor aproximante — cerîndu-le să fie nu chiar polinoame, ci doar funcții de a doua clasă Baire, — mulțimea de sacrificiu se restrînge de la una de măsură interioară inferioară unui număr pozitiv dat la o mulțime de măsură interioară nulă. Desigur că aceste teoreme se lasă mai greu extinse într-un cadru mai general, deoarece ele sînt legate de entități foarte speciale, ca aceea de polinom și aceea de măsură interioară. Dar în condițiile diferitelor extensiuni pe care aceste entități le-au căpătat în matematica ultimelor decenii s-ar putea încerca o lărgire a cadrului de valabilitate al teoremelor lui Sierpiński și Saks-Sierpiński și o punere în legătură a acestor teoreme cu teorema lui Vasilescu (cel puțin pentru dreapta numerică).

Să revenim acum la rezultatul lui Vasilescu și să urmărim firul considerațiilor care l-au condus pe Tevy la faptele despre care am vorbit mai sus.

Fie X un spațiu metric separabil și Y un spațiu metric separabil complet. Fie o funcție $f: X \rightarrow Y$. Se spune că f este boreliană de clasă α în punctul x_0 din X dacă, pentru orice vecinătate deschisă V a lui $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ este o mulțime boreliană de clasă aditivă α în x_0 , adică există o vecinătate U a lui x_0 astfel încît $U \cap f^{-1}(V)$ să fie o mulțime de clasă aditivă α în X . Pentru $\alpha = 0$ se regăsește definiția continuității în x_0 .

Propoziția 1. Funcția $f: X \rightarrow Y$ este de clasă boreliană α dacă și numai dacă ea este de clasă α în orice punct din X .

Demonstrație. Necesitatea fiind evidentă, vom stabili suficiența condiției. Fie G o mulțime deschisă în Y . Deoarece f este de clasă α în orice punct din X , $f^{-1}(G)$ este boreliană, de clasă aditivă α , în orice punct din $f^{-1}(G)$, fapt care, în virtutea unui rezultat cunoscut (C. Kuratowski, *Topologie*, vol.I, Warszawa, 1958, p.264), garantează că $f^{-1}(G)$ este de clasă α aditivă, deci că f este de clasă α .

Să notăm cu B_α mulțimea punctelor din X în care f este de clasă α .

Propoziția 2. Restricția aplicației f la mulțimea $B_\alpha(f)$ este o funcție boreliană de clasă α .

Demonstrație. Să observăm mai întâi că în topologia indusă $B_\alpha(f)$ este un spațiu separabil. Fie acum o mulțime G deschisă în Y . Pentru a arăta că $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este o mulțime boreliană de clasă α aditivă în $B_\alpha(f)$, să considerăm un element x din $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$. Deoarece f este de clasă α în x , există o vecinătate deschisă V a lui x pentru care mulțimea $V \cap f^{-1}(G)$ este de clasă aditivă α în X . Rezultă că

$$(V \cap B_\alpha(f)) \cap f^{-1}(G) = (V \cap f^{-1}(G)) \cap B_\alpha(f).$$

Deoarece $V \cap B_\alpha(f)$ este o vecinătate a lui x în $B_\alpha(f)$, iar membrul al doilea al egalității este o mulțime de clasă aditivă α în $B_\alpha(f)$, rezultă că mulțimea $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este de clasă aditivă α relativ la $B_\alpha(f)$, în toate punctele sale și, deoarece $B_\alpha(f)$ este un spațiu separabil, rezultă, în baza unei propoziții deja utilizate din tratatul de topologie al lui Kuratowski, că $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este o mulțime de clasă aditivă α în $B_\alpha(f)$. Propoziția 2 este astfel demonstrată.

Cu aceste preparative, putem prezenta generalizarea dată de Tevy teoremei lui Vasilescu, generalizare care în același timp constituie o redemonstrare a ei fără utilizarea funcțiilor multiforme și o precizare remarcabilă a semnificației acestei teoreme.

Teorema Vasilescu-Tevy. Fie X un spațiu metric separabil, iar Y un spațiu metric separabil complet. Fie o funcție $f: X \rightarrow Y$. Pentru orice număr ordinal $\alpha > 0$ există un șir $\{f_n\}$ de funcții boreliene de clasă $\leq \alpha$ care converge către f în orice punct din $B_\alpha(f)$.

Dacă $Y = \mathbb{R}^n$ sau dacă dimensiunea topologică a lui X este egală cu zero, teorema în discuție este adevărată și pentru $\alpha = 0$.

Demonstrație. Deoarece, conform Propoziției 2, restricția funcției f la mulțimea $B_\alpha(f)$ este o funcție de clasă α , putem aplica aici o cunoscută teoremă de prelungire a funcțiilor

boreliene (C. Kuratowski, loc. cit., p.342), conform căreia dacă X este un spațiu metric, Y un spațiu metric separabil și complet, iar B o parte a lui X , atunci orice funcție definită pe B și de clasă boreliană α se poate prelungi pe întregul spațiu X , la o funcție de clasă boreliană $\alpha + 1$. Să luăm, în rolul lui B , mulțimea $B_\alpha(f)$. Rezultă existența unei funcții $g: X \rightarrow Y$ de clasă $\alpha + 1$, care coincide cu f în orice punct din $B_\alpha(f)$. Pentru $\alpha > 0$ avem $\alpha + 1 > 1$, iar funcția g este limita unui șir $\{f_n\}$ de funcții de clasă $\leq \alpha$.

În cazurile particulare menționate în enunț (adică $Y = R$ și $\dim.X = 0$), teorema are loc și pentru $\alpha = 0$, deoarece în acest caz funcțiile de prima clasă boreliană coincid cu funcțiile de prima clasă Baire. Pentru $X = Y = R$, regăsim teorema lui Vasilescu.

Sîntem acum în măsură să înlăturăm o anumită suspiciune care plana asupra teoremei lui Vasilescu, aceea constînd în faptul că ea s-ar referi numai în aparență la orice funcție, fiind lipsită de obiect în cazul în care funcția nu admite puncte de continuitate (și, adăugăm acum, fiind trivială în cazul în care mulțimea punctelor de continuitate nu este suficient de consistentă; de exemplu, cînd este finită). În acest scop, vom reface raționamentul precedent, în cazul particular $X = Y = R$, luînd în rolul submulțimii B din teorema de prelungere o parte densă a lui X , cu proprietatea că restricția funcției considerate la această parte densă, fie ea A , este continuă. Existența unei mulțimi A cu aceste proprietăți rezultă din aceeași teoremă a lui Blumberg din 1922, despre care a mai fost vorba mai sus. Din continuitatea funcției $f|_A$ rezultă că f este de clasă boreliană zero pe A , deci se poate prelungi pe tot spațiul R la o funcție g de prima clasă Baire. Rezultă existența unui șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe R , care tinde către g în orice punct din R . Însă g coincide cu f pe A , deci șirul f_n tinde către f în orice punct din A . Așadar, are loc următorul rezultat pe care în mod firesc îl vom atribui tuturor celor trei autori de la care au fost împrumutate unele idei:

Teorema Blumberg-Vasilescu-Tevy. *Fiind dată o funcție reală f definită în R , există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue în R , care converge către f pe o mulțime densă în R .*

După cum rezultă din demonstrație, punctele în care $\{f_n\}$ converge către f sînt punctele de continuitate ale restricției

boreliene (C. Kuratowski, loc. cit., p.342), conform căreia dacă X este un spațiu metric, Y un spațiu metric separabil și complet, iar B o parte a lui X , atunci orice funcție definită pe B și de clasă boreliană α se poate prelungi pe întregul spațiu X , la o funcție de clasă boreliană $\alpha + 1$. Să luăm, în rolul lui B , mulțimea $B_\alpha(f)$. Rezultă existența unei funcții $g: X \rightarrow Y$ de clasă $\alpha + 1$, care coincide cu f în orice punct din $B_\alpha(f)$. Pentru $\alpha > 0$ avem $\alpha + 1 > 1$, iar funcția g este limita unui șir $\{f_n\}$ de funcții de clasă $\leq \alpha$.

În cazurile particulare menționate în enunț (adică $Y = R$ și $\dim.X = 0$), teorema are loc și pentru $\alpha = 0$, deoarece în acest caz funcțiile de prima clasă boreliană coincid cu funcțiile de prima clasă Baire. Pentru $X = Y = R$, regăsim teorema lui Vasilescu.

Sîntem acum în măsură să înlăturăm o anumită suspiciune care plana asupra teoremei lui Vasilescu, aceea constînd în faptul că ea s-ar referi numai în aparență la orice funcție, fiind lipsită de obiect în cazul în care funcția nu admite puncte de continuitate (și, adăugăm acum, fiind trivială în cazul în care mulțimea punctelor de continuitate nu este suficient de consistentă; de exemplu, cînd este finită). În acest scop, vom reface raționamentul precedent, în cazul particular $X = Y = R$, luînd în rolul submulțimii B din teorema de prelungere o parte densă a lui X , cu proprietatea că restricția funcției considerate la această parte densă, fie ea A , este continuă. Existența unei mulțimi A cu aceste proprietăți rezultă din aceeași teoremă a lui Blumberg din 1922, despre care a mai fost vorba mai sus. Din continuitatea funcției $f|_A$ rezultă că f este de clasă boreliană zero pe A , deci se poate prelungi pe tot spațiul R la o funcție g de prima clasă Baire. Rezultă existența unui șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe R , care tinde către g în orice punct din R . Însă g coincide cu f pe A , deci șirul f_n tinde către f în orice punct din A . Așadar, are loc următorul rezultat pe care în mod firesc îl vom atribui tuturor celor trei autori de la care au fost împrumutate unele idei:

Teorema Blumberg-Vasilescu-Tevy. *Fiind dată o funcție reală f definită în R , există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue în R , care converge către f pe o mulțime densă în R .*

După cum rezultă din demonstrație, *punctele în care $\{f_n\}$ converge către f sînt punctele de continuitate ale restricției*

lui f la A ; deci varianta Blumberg-Vasilescu-Tevy ameliorează varianta inițială a lui Vasilescu, în ceea ce privește informația pe care o furnizează asupra mulțimii punctelor de convergență a șirului $\{f_n\}$ către f , salvînd în același timp și o bună parte din proprietatea de continuitate a lui f în punctele de convergență, în sensul că relativizează această proprietate la mulțimea densă A .

Teorema Blumberg-Vasilescu-Tevev poate fi ușor extinsă, în funcție de extensiunile care s-au dat teoremei lui Blumberg. După cum am semnalat, chiar Blumberg și-a extins teorema în 1944 la aplicații ale spațiului euclidian m -dimensional în spațiul euclidian n -dimensional (m și n numere naturale arbitrare), deci: *Fiind dată o funcție $f: R^m \rightarrow R^n$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue în R^m , care converge către f pe o mulțime densă în R^m .*

O variantă mai generală, pentru spații metrice separabile, se poate obține din extensiunea teoremei lui Blumberg la astfel de spații.

Din păcate, mulțimea densă A nu poate fi totdeauna aleasă în așa fel încît să fie nenumărabilă. W. Sierpiński a arătat încă în 1910 (în „Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie”) că, dacă admitem ipoteza continuului, atunci există o funcție care nu admite restricție continuă pe nici o mulțime nenumărabilă. Deci, atîta vreme cît demersul nostru trece prin teorema lui Blumberg, nu putem găsi totdeauna un șir $\{f_n\}$ de funcții continue, care să convergă către f pe o mulțime nenumărabilă. Aceasta este una din limitările impuse teoremei lui Vasilescu de abordarea ei cu ajutorul teoremei lui Blumberg. Rămîne ca un exemplu — eventual chiar cel folosit de Sierpiński — să stabilească dacă este vorba aici de o infirmitate a instrumentului folosit sau de o limitare care ține de natura lucrurilor. O altă limitare se referă la imaginea mulțimii A de convergență a șirului $\{f_n\}$ către f . O întrebare legitimă ne invită să răspundem dacă nu cumva nu numai A , dar și imaginea ei prin f este o mulțime densă (de astă dată, în intervalul lui f , dacă ne referim la cazul $X = Y = R$). Răspunsul negativ la această întrebare este sugerat (dar rămîne ca el să fie și confirmat) de răspunsul negativ la o întrebare corespunzătoare în ceea ce privește teorema lui Blumberg. Într-adevăr, C. J. Neugebauer a arătat (în 1962, în „Mathematische Zeitschrift”) că, în teorema lui Blumberg, mulțimea $f(A)$ este densă în intervalul valorilor

lui f dacă și numai dacă f este cvasicontinuă, în sensul lui Kempisty („Fundamenta Mathematicae”, 1932). Dar nu orice funcție reală este cvasicontinuă.

Față de aceste limitări probabile ale teoremei lui Vasilescu, rămîne să ne îndreptăm atenția în alte direcții în care am putea obține alternative interesante față de varianta inițială a lui Vasilescu sau față de varianta Vasilescu-Țevy. Ținînd seama de legătura strînsă dintre funcțiile continue și cele măsurabile (prin teorema lui Luzin) și de legătura corespunzătoare dintre funcțiile continue și cele cu proprietatea lui Baire, Ionel Țevy a reușit să obțină două variante noi ale teoremei lui Vasilescu, variante pe care le vom prezenta în cele ce urmează, urmîndu-l pe Ionel Țevy („Studii și cercetări matematice”, 1969; „Revue roumaine de mathématiques pures et appl.”, 1972).

Fie un spațiu amorf T și o σ -algebră \mathcal{C} de părți ale lui T . Să notăm cu \mathcal{C}_A urma lui \mathcal{C} pe o submulțime $A \subseteq T$; cu alte cuvinte, \mathcal{C}_A este familia mulțimilor de forma $C \cap A$, unde C parcurge pe \mathcal{C} . Vom reproduce, fără demonstrație

Lema 1. Fiind dată o mulțime $A \subseteq T$ și un sistem de mulțimi $B_{i_1 \dots i_n}$ din \mathcal{C}_A , astfel încît

$$B_{i_1 \dots i_n} \cap B_{j_1 \dots j_k} = 0 \text{ pentru } (i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_k), \quad k \leq n,$$

există un sistem de mulțimi $C_{i_1 \dots i_n}$ din \mathcal{C}_A , unde

$$A_n = \bigcup C_{i_1 \dots i_n},$$

reuniunea fiind extinsă la toate sistemele de n indici, astfel încît :

$$1^0 \quad A_n \in \mathcal{C},$$

$$2^0 \quad A \cap C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n},$$

$$3^0 \quad C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_k} = 0 \text{ pentru } (i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_k), \quad k \leq n,$$

$$4^0 \quad C_{i_1 \dots i_n} = 0 \text{ dacă } B_{i_1 \dots i_n} = 0.$$

În particular, mulțimile $C_{i_1 \dots i_n}$ sînt din \mathcal{C} .

Cu ajutorul acestei leme se demonstrează următoarea propoziție :

Fie T un spațiu amorf, Y un spațiu metric separabil complet și $A \subseteq T$. Orice funcție $f: A \rightarrow Y$, \mathcal{C} -măsurabilă relativ la A poate fi prelungită, pe o mulțime A^ din \mathcal{C} , la o funcție f^* , \mathcal{C} -măsurabilă relativ la A^* .*

Pentru demonstrație, să observăm că măsurabilitatea lui f relativ la A implică existența unui șir $\{f_n\}$ de funcții \mathcal{C} -etajate relativ la A , șir care converge către f . Avem deci $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ pentru $N(x, \varepsilon) < k \leq n$ și $f_n(A) = \{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^i, \dots\}$.

Să punem

$$B_{i_1, \dots, i_n} = f_1^{-1}(y_1^{i_1}) \cap \dots \cap f_n^{-1}(y_n^{i_n}).$$

Aceste mulțimi sînt din \mathcal{C}_A și ipotezele lemei precedente sînt verificate. Deci, pentru orice n , există mulțimile A_n și $C_{i_1 \dots i_n}$ din \mathcal{C} , cu proprietățile $1^0 - 4^0$ din enunțul lemei.

Fie acum mulțimea

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Evident, $A^* \in \mathcal{C}$. Putem prelunge fiecare f_n pe A_n , punînd $f_n^*(x) = y_n^{i_n}$ dacă $x \in C_{i_1 \dots i_n}$. Mulțimea valorilor funcție astfel definite este cel mult numărabilă, iar f_n^* este \mathcal{C} -măsurabilă în raport cu A_n , deoarece $(f_n^*)^{-1}(y_n^i) = \bigcup C_{i_1 \dots i_{n-1}}$, reuniunea fiind extinsă la toate sistemele de $n - 1$ indici.

Vom arăta că șirul $\{f_n^*\}$ de funcții astfel obținute converge pe A^* .

Fie $x_0 \in A^*$; deci $x_0 \in C_{i_1 \dots i_n}$. Dacă $x_0 \in C_{j_1 \dots j_k}$, cu $k \leq n$, atunci, după 1^0 , $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$. Fie $x \in B_{i_1 \dots i_n}$; atunci $f_n^*(x) = y_n^{i_n} = f_n^*(x_0) = f_n(x)$. Deoarece $i_k = j_k$, rezultă că $f_k^*(x) = y_k^{i_k} = f_k^*(x_0) = f_k(x)$ și deci $d(f_n^*(x_0), f_k^*(x_0)) = d(f_n(x), f_k(x)) < \varepsilon$ pentru $N(x, \varepsilon) < k \leq n$, deoarece $x \in A$. Rezultă că $\{f_n^*(x_0)\}$ este un șir Cauchy în Y , deci un șir convergent.

Funcția

$$f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(x) \text{ pentru orice } x \in A^*$$

este \mathcal{C} -măsurabilă în raport cu A^* (deoarece este limită de funcții măsurabile) și prelungește pe f , răspunzînd în întregime enunțului propoziției.

Să observăm că, de fapt, funcția f se prelungește chiar la o funcție \mathcal{C} -măsurabilă pe T . Într-adevăr, deoarece $A^* \in \mathcal{C}$, funcția F constantă pe complementara lui A^* și egală cu f^* pe A^* este \mathcal{C} -măsurabilă.

Revenind la spațiile metrice X și Y , să considerăm în X un σ -ideal \mathfrak{N} ce generează topologia $T(\mathfrak{N})$ și σ -algebra $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$.

Funcția $f: X \rightarrow Y$ este $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$ -măsurabilă dacă pentru orice mulțime deschisă $N \subseteq Y$ avem $f^{-1}(N) \in \mathcal{A}(\mathfrak{N})$.

Lema 2. Fie o funcție $f: X \rightarrow Y$ și fie $T(f)$ mulțimea punctelor în care f este $T(\mathfrak{N})$ -continuă. Atunci există o funcție $\hat{f}: X \rightarrow Y$, $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$ -măsurabilă, care coincide cu f pe $T(f)$.

Demonstrație. Deoarece restricția oricărei funcții la mulțimea punctelor sale de continuitate este continuă pe această mulțime, rezultă că pentru orice mulțime deschisă $H \subseteq Y$ avem $g^{-1}(H) = G_T \cap T(f)$, unde g este restricția lui f la $T(f)$, iar G_T este o mulțime $T(\mathfrak{N})$ -deschisă. Însă $G_T \in \mathcal{A}(\mathfrak{N})$ și deci g este o funcție $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$ -măsurabilă în raport cu $T(f)$. Aplicând observația făcută după demonstrarea propoziției precedente, obținem funcția \hat{f} cu proprietățile din enunț.

Vom da acum o *variantă măsurabilă a teoremei lui Vasilescu* (O numim așa, deoarece cazul particular cel mai important de σ -ideal \mathfrak{N} este cel al mulțimilor de măsură nulă; în acest caz, luând $X = R^m$, teorema care urmează se obține din binecunoscuta teoremă a lui Luzin, privind restricțiile continue ale funcțiilor măsurabile. Dar tot atât de bine am putea lua în rolul lui \mathfrak{N} σ -idealul mulțimilor de prima categorie Baire. În acest caz, teorema care urmează se obține din teorema cunoscută în topologia generală, privind restricțiile continue ale funcțiilor cu proprietatea lui Baire):

Fiind dată o funcție $f: X \rightarrow R^n$, există o mulțime $N \in \mathfrak{N}$ și un șir de funcții $f_n: (X - N) \rightarrow R^n$, continue pe $X - N$, care converge către f în orice punct din $(X - N) \cap T(f)$.

Într-adevăr, Ionel Tevy a stabilit în teza sa că dacă σ -idealul \mathfrak{N} generează o σ -algebră, atunci, notînd această σ -algebră prin $\mathcal{A}_+(\mathfrak{N})$, $\mathcal{A}_\times(\mathfrak{N})$, $\mathcal{A}_B(\mathfrak{N})$ după cum ea este, respectiv, de tip aditiv, de tip multiplicativ sau de tip Baire, are loc următoarea teoremă:

a) Pentru ca o funcție $f: X \rightarrow Y$ să fie $\mathcal{A}_B(\mathfrak{N})$ -măsurabilă este necesar și suficient să existe o mulțime $M \in \mathfrak{N}$ astfel încât restricția lui f la $X - M$ să fie continuă; b) Condiția necesară și suficientă ca $f: X \rightarrow Y$ să fie o funcție $\mathcal{A}_+(\mathfrak{N})$ -măsurabilă sau $\mathcal{A}_\times(\mathfrak{N})$ -măsurabilă este existența unei mulțimi $N \in \mathfrak{N}$ astfel încât restricția lui f la $X - N$ să fie o funcție boreliană de clasă 1 relativ la $X - N$.

Din această teoremă rezultă existența unei mulțimi $N \in \mathfrak{N}$ pentru care funcția f dată prin lema 2 este continuă sau de prima clasă pe $X - N$. Rezultă că restricția lui \hat{f} la $X - N$ este, pe $X - N$, limita unui șir de funcții continue pe această mulțime.

Varianta „măsurabilă” a teoremei lui Vasilescu admite următoarea precizare:

Dacă σ -algebra $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$ este de tip Baire sau de tip multiplicativ, atunci funcțiile continue f_n pot fi definite pe întreg spațiul X , însă convergența are loc de asemenea cu excepția unei mulțimi din \mathfrak{N} .

Pentru stabilirea acestui rezultat suplimentar se folosește faptul că orice funcție $\mathcal{A}_B(\mathfrak{N})$ -măsurabilă sau $\mathcal{A}_\times(\mathfrak{N})$ -măsurabilă coincide, neglijând mulțimi din \mathfrak{N} , cu o funcție boreliană de prima clasă. Există deci o mulțime $N \in \mathfrak{N}$ și o funcție $g: X \rightarrow R^n$ de prima clasă, astfel încât $f = g$ pe $X - N$ și se obține astfel precizarea menționată.

Rezultate similare se obțin și în cazul funcțiilor aproximativ continue, deși topologia densității nu este generată de un ideal de mulțimi.

Fie o aplicație $f: R^n \rightarrow R$ și fie $A_p(f)$ mulțimea punctelor din R^n în care f este aproximativ continuă. Deoarece în topologia densității mulțimile boreliene coincid cu mulțimile măsurabile Lebesgue, rezultă, ca și în lema 2, că există o funcție măsurabilă g care coincide cu f pe $A_p(f)$. Rezultă deci că orice funcție $f: R^n \rightarrow R$ coincide pe mulțimea $A_p(f)$ cu o funcție aproximativ continuă aproape peste tot.

Mai important este însă să dăm, după Tevy, o variantă «aproximativ-continuă» a teoremei lui Vasilescu:

Fiind dată funcția $f: R^m \rightarrow R$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe R^m , care converge către f aproape peste tot pe mulțimea $A_p(f)$.

Pentru demonstrație, să considerăm funcția măsurabilă g de mai sus. În baza teoremei lui Luzin, privind aproximarea funcțiilor măsurabile prin funcții continue, există un

șir monoton ascendent $\{F_n\}$ de mulțimi închise, astfel încât măsura complementarei lui F_n să fie inferioară lui $1/n$, iar g să fie continuă pe fiecare mulțime F_n . Vom prelungi prin continuitate restricția lui g la F_n de la mulțimea F_n la întregul spațiu R^n . Notînd cu f_n această prelungire, obținem un șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe R^n , care converge către g în orice punct din mulțimea $F = \bigcup F_n$. Însă măsura complementarei lui F este egală cu zero, deci șirul $\{f_n\}$ converge către g aproape peste tot, adică $\{f_n\}$ converge către f aproape peste tot pe $A_p(f)$.

Să observăm că, chiar din demonstrația de mai sus, rezultă următoarea variantă a teoremei lui Vasilescu pentru funcții măsurabile Lebesgue:

Fiind dată funcția măsurabilă Lebesgue $f: R^m \rightarrow R$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe R^m , care converge către f aproape peste tot. De aici, folosind teorema lui Weierstrass de aproximare a funcțiilor continue prin polinoame, rezultă: *Orice funcție măsurabilă $f: R^m \rightarrow R$ este, aproape peste tot, limita unui șir de polinoame.* Regăsim astfel un vechi rezultat al lui Maurice Fréchet, din 1905, rezultat precizat de Sierpiński în 1922 (în „Fundamenta Mathematicae”): *Orice funcție măsurabilă $f: R^m \rightarrow R$ este, aproape peste tot, suma unei serii absolut convergente de polinoame.*

Tot așa, folosind existența, pentru funcțiile cu proprietatea lui Baire, a unei restricții continue pe un rezidual, obținem următoarea variantă a teoremei lui Vasilescu pentru funcții cu proprietatea lui Baire:

Orice funcție cu proprietatea lui Baire $f: X \rightarrow R^n$, unde X este un spațiu metric separabil, este, pe complementara unei anumite mulțimi de prima categorie din X , limita unui șir de funcții continue (și, pentru $X = R$, chiar de polinoame).

Într-adevăr, din faptul că spațiul metric X este separabil rezultă existența unei mulțimi A de prima categorie, astfel încât restricția lui f la $X - A$ să fie continuă. Din completitudinea lui R^n rezultă existența unei funcții g de prima clasă Baire pe X , care coincide cu f pe $X - A$. Funcția g este, pe X , limita unui șir de funcții continue (valorile lui g fiind în R^n), deci f este, pe $X - A$, limita unui șir de funcții continue. În virtutea teoremei lui Weierstrass, f este, pe $X - A$, chiar limita unui șir de polinoame.

După cum se poate observa ușor, nici varianta „măsurabilă”, nici varianta „aproximativ continuă” a teoremei

lui Vasilescu nu este nici mai generală, nici mai particulară decât variantele precedente ale teoremei lui Vasilescu. Aceasta, din cauză că ceea ce se câștigă în ceea ce privește generalitatea mulțimii de convergență se pierde prin introducerea unei mulțimi de excepție, pe care convergența ar putea să nu aibă loc. O analiză mai atentă ar putea să aducă unele precizări suplimentare în această privință.

*

Teorema lui Vasilescu ca și diferitele ei variante introduc în analiza matematică un tip nou de mulțimi excepționale. Într-adevăr, aici mulțimea excepțională în raport cu convergența către f nu numai că depinde de funcția f , dar se și definește prin raportare directă la proprietățile lui f , anume constă din punctele în care nu are loc o anumită proprietate punctuală a funcției f .

Diferitele variante ale teoremei lui Vasilescu, puse în evidență prin analiza lui Tevy, au scos în același timp la iveală un substrat comun și un aspect de altă natură al diferitelor tipuri de restricții continue care apar la diferite clase de funcții reale. Prin legăturile ei profunde cu teorema lui Blumberg, cu cea a lui Luzin și cu teorema privind existența unei restricții continue pe un rezidual la orice funcție cu proprietatea lui Baire, teorema lui Vasilescu pune într-o lumină nouă chiar aceste teoreme, creează variante „de convergență” ale acestor teoreme, punând în evidență tot atâtea aspecte ale aproximării funcțiilor arbitrare prin funcții continue.

Numeroase întrebări naturale își așteaptă răspunsul, în legătură cu rolul continuității și al funcțiilor arbitrare în teorema lui Vasilescu. În ce măsură putem obține teoreme de tip Vasilescu în care continuitatea să fie înlocuită cu diferențiabilitatea sau chiar cu analiticitatea? (Un rezultat relativ recent al lui Jack Ceder, în „Fundamenta Mathematicae”, 1969, rezultat care include unele teoreme mai vechi ale lui I. Maximoff din 1936 și F. M. Filipczak din 1966, atrage atenția asupra posibilităților existente în această privință: Fie f o funcție reală, definită pe o mulțime A , nenumărabilă, de numere reale. Există o mulțime numărabilă C inclusă în A , astfel încât, pentru orice x din $A - C$, se poate găsi o mulțime B bilateral densă în sine — în sensul că orice punct din B e punct

de acumulare bilaterală — conținând pe x și astfel încît restricția lui f la B să fie monotonă și să admită derivată — finită sau infinită.) Ce precizări pot apărea atunci cînd, în loc de funcții arbitrare, luăm, în teorema lui Vasilescu, funcții din diferite clase particulare (de exemplu clasa funcțiilor analitice în sensul lui Luzin-Suslin, clasa funcțiilor proiective, clasa funcțiilor boreliene etc.) așa cum am obținut mai sus variantele teoremei lui Vasilescu pentru funcții măsurabile și pentru funcții cu proprietatea lui Baire? Probabil că în acest fel se regăsesc și unele rezultate cunoscute, așa cum am regăsit la un moment dat un rezultat al lui Fréchet din 1905. Dar simplul fapt al aducerii într-o albie comună a unor rezultate atît de variate este semnificativ pentru capacitatea teoremei lui Vasilescu de a include în raza ei de acțiune un număr important de fapte din analiza matematică.

Primele decenii ale secolului nostru, odată cu tendința de a se studia clase de funcții din ce în ce mai generale, aduc în atenția matematicienilor studiul proprietăților aparținând tuturor funcțiilor reale de una sau mai multe variabile reale. Existența unor proprietăți nebanale de acest tip rezultă din faptul că aici arbitrarul se referă numai la legea de corespondență, în timp ce mulțimea de definiție și mulțimea în care funcția își ia valorile rămân particulare (spațiul R^n și respectiv dreapta numerică). O funcție cu adevărat arbitrară ar fi de tipul $f:A \rightarrow B$, unde A și B sînt mulțimi arbitrare, neînzestrate cu nici o structură, legea de corespondență fiind de asemenea arbitrară. Dar nu la astfel de funcții se referă rezultatele obținute, în special între 1910—1930, de matematicieni ca Denjoy, Young, Blumberg, Luzin și alții. Toți acești autori obțin teoreme relative la distribuția anumitor proprietăți locale ale unei funcții reale arbitrare de o variabilă reală (uneori și de mai multe variabile reale). Aceste teoreme cuprind, în esența lor, informații profunde asupra structurii dreptei numerice sau a spațiului R^n . Tocmai în această ordine de idei se înscriu multe din rezultatele lui Alex. Froda, cuprinse în lucrările sale din 1928 și 1929, care culminează cu teza sa din 1929 și pe care le reia în 1948 și în 1955. Un rezultat tipic în această privință, legat de numele lui Alex. Froda, este acela din teză, care afirmă că mulțimea punctelor de discontinuitate de prima specie ale unei funcții reale arbitrare, de o variabilă reală, este cel mult numărabilă. Ceea ce se știa anterior era doar faptul că dacă o funcție reală de variabilă reală nu posedă nici un punct de discontinuitate de a doua specie, atunci punctele de discontinuitate ale funcției formează o mulțime cel mult numărabilă. Acest din urmă rezultat a fost extins în 1956 de către Yu. V. Prohorov la funcții de o variabilă reală cu valori într-un spațiu metric (*Convergence of random*

processes and limit theorem in probability theory, „Teor. Veroyatnosti i Primenenie”, 1(1956), pp.177—238), iar L. S. Gal a obținut în 1957 un rezultat oarecum vecin: Dacă o funcție de o variabilă reală, cu valori într-un spațiu metric, este continuă la dreapta (sau la stînga) în fiecare punct, atunci punctele ei de discontinuitate formează o mulțime cel mult numărabilă. (*On the continuity and limiting values of functions*, „Trans. American Math. Soc.”, 86 (1957), pp.321—334.) Un rezultat care depășește atît pe cel al lui Prohorov, cît și pe cel al lui Gal a fost obținut recent de către Wang Yim-Ming (*A theorem on points of discontinuity of functions*, „Journ. London Math. Soc.”, 40(1965), pp. 324—325): Fiind dată o funcție de o variabilă reală cu valori într-un spațiu metric, punctele ei de discontinuitate în care există cel puțin una din limitele unilaterale formează o mulțime cel mult numărabilă. Este de observat că, în timp ce rezultatele lui Prohorov și Gal lăsau neatinsă teorema lui Alex. Froda, rezultatul lui Wang Yim-Ming constituie, pe de o parte, o întărire a teoremei lui Froda, chiar în cazul funcțiilor reale de o variabilă reală, iar pe de altă parte ea este o extensiune a acestei întăriri la funcții de o variabilă reală cu valori într-un spațiu metric. Ar fi interesant să se urmărească mai departe posibilitatea de a se înlocui, în această teoremă, spațiul metric printr-un spațiu mai general, în care are sens ideea de convergență. Pe de altă parte, nu este lipsit de sens să se caute corespondentul teoremei lui Froda la funcții reale de mai multe variabile reale.

Teorema lui Froda asupra discontinuităților de prima specie ale unei funcții arbitrare de o variabilă reală figurează în nenumărate tratate și manuale de analiză matematică. La aproape 50 de ani de la publicarea ei, nu numai că nu a fost uitată, dar o învață orice student din anul I al facultăților de matematică. Este cu drept cuvînt o teoremă clasică. Atît de clasică, încît ea a intrat în „folclorul matematic”. După ce, multă vreme, teorema a fost menționată fără a se mai aminti numele autorului ei, ne întrebăm cîți dintre matematicienii de azi știu că această teoremă aparține lui Froda.

Alte rezultate interesante ale lui Froda se referă la clasificarea discontinuităților funcțiilor reale de una sau mai multe variabile reale. Pentru funcții de o variabilă există distincția clasică între discontinuități de prima specie și

discontinuități de a doua specie. În ceea ce privește funcțiile de două variabile reale, există o clasificare dată în deceniul al patrulea al secolului nostru, de către Verčenko și Kolmogorov, dar aceasta nu are eleganța și simplitatea celei relative la funcții de o variabilă. Ideea lui Alex. Froda a fost de a introduce drept criteriu de clasificare a punctelor de discontinuitate comportarea oscilațiilor iterate. La prima vedere, acest criteriu pare neindicat, deoarece, după cum au arătat mai de mult Denjoy și Sierpiński, iterata de ordinul al treilea a oscilației oricărei funcții coincide cu iterata ei de ordinul al doilea. H. Blumberg introdusese în 1917 („Annals of Mathematics”, vol.18 (1917), pp.147—160) diferite tipuri de oscilații generalizate, definite ca și oscilația obișnuită, însă neglijându-se mulțimile aparținând unei clase aditive și ereditare de mulțimi (clasa mulțimilor finite, clasa mulțimilor numărabile, clasa mulțimilor de prima categorie, clasa mulțimilor de măsură nulă). Iteratele unor astfel de oscilații manifestă o mult mai mare finețe în comportare, însă nici unul dintre aceste tipuri de oscilație nu se impune în mod natural drept criteriu de clasificare a discontinuităților. Alex. Froda nu se oprește la nici unul dintre tipurile de oscilație introduse de Blumberg (dealtfel, după cum însuși mărturisește într-un articol din 1955, a luat cunoștință de lucrarea lui Blumberg abia ulterior), ci introduce un alt tip de oscilație, care diferă în aparență foarte puțin de oscilația obișnuită, dar care se dovedește a fi de o deosebită finețe în ceea ce privește operația de iterare : aceasta este oscilația obținută prin neglijarea valorii funcției într-un singur punct, tocmai în punctul în cauză, în care se studiază discontinuitatea. Acest tip de oscilație se recomandă în modul cel mai natural drept criteriu de clasificare a discontinuităților, deoarece această oscilație înregistrează comportarea funcției în întreaga vecinătate redusă a punctului în cauză. Alex. Froda o numește oscilația de vecinătate și o notează $\omega_0(f, P)$ (oscilația de vecinătate a funcției f în punctul P). Punctele P de discontinuitate pentru care $\omega_0(f, P) = 0$ sînt numite puncte de discontinuitate artificială ; ele formează totdeauna o mulțime cel mult numărabilă. Punctele de discontinuitate neartificială P pentru care $\omega_\alpha(f, P) = 0$ ($\alpha > 1$) formează o mulțime cel mult numărabilă. Punctele P pentru care $\omega_0(f, P) = 0$,

în timp ce $\omega_0^{\alpha'}(f, P) > 0$ pentru orice $\alpha' < \alpha$ (numere ordinale de prima sau a doua clasă) sînt numite puncte de discontinuitate reductibile, de ordin α . Pentru $\alpha > 1$, mulțimea acestor puncte este cel mult numărabilă, în timp ce pentru $\alpha = 1$ această restricție încetează. În sfîrșit, punctele P pentru care $\omega_0^{\alpha}(f, P) > 0$ oricare ar fi numărul α de prima sau a doua clasă transfinită sînt numite puncte de discontinuitate ireductibilă; mulțimea acestora este de prima categorie în sensul lui Baire.

Problematica de mai sus, modul ei de abordare și rezultatele obținute sînt deosebit de semnificative pentru maniera în care Alex. Froda a abordat teoria funcțiilor reale. Pornindu-se de la o noțiune sau o teoremă cunoscută, i se aduc acesteia unele modificări, în aparență neînsemnate, dar care-i conferă potențe noi, obținîndu-se astfel un instrument de investigație mai fin decît cel existent. După o analiză în care complicațiile tehnice nu ascund niciodată eleganța ideii care le străbate, se obține un rezultat care se enunță de cele mai multe ori simplu și pregnant și are un caracter oarecum definitiv.

În continuarea rezultatelor obținute de Blumberg și Froda, ar fi interesant să se studieze diferite clase de ecuații funcționale în care funcția necunoscută intervine atît liberă, cît și prin oscilații sau numai prin oscilații ale ei de diferite tipuri și de diferite ordine. Într-adevăr, punctele de continuitate în sens clasic sînt date de acele soluții ale ecuației $\omega(f, P) = 0$ care se găsesc în domeniul de definiție al funcției f . O idee naturală este aceea de a considera ecuațiile obținute prin anularea oscilațiilor care rezultă din neglijarea comportării funcției în punctele unei mulțimi aparținînd unei anumite clase aditive și ereditare — așa cum a procedat Blumberg — sau în punctul în a cărui vecinătate studiem comportarea funcției, așa cum a procedat Froda. Mergînd mai departe în această direcție, apare naturală considerarea unor ecuații funcționale obținute prin combinarea mai multor tipuri de oscilații, cu ajutorul operațiilor uzuale. Astfel de ecuații pot fi $\omega_1(f; P) = \omega_2(\omega_0(f; P), \omega_0(\omega_1(f; P))) = \omega_2(\omega_0(f; P)), \omega_3(f; P) = \omega_2(f; P)$ etc., unde prin ω_0 am notat oscilația lui Froda, prin ω_1 am notat oscilația lui Blumberg rezultată din neglijarea comportării funcțiilor pe mulțimile finite, prin ω_2 am notat oscilația lui Blumberg rezultată din neglijarea

comportării lui f pe mulțimile numărabile, iar prin ω_3 am notat oscilația lui Blumberg rezultată din neglijarea comportării lui f pe mulțimile de măsură nulă. Se pot considera și sisteme de ecuații de acest tip, cu mai multe funcții necunoscute, se pot cerceta condiții de existență și de unicitate a soluțiilor. Problemele care apar în această ordine de idei sînt foarte inegale ca grad de dificultate, unele fiind susceptibile de răspunsuri care rezultă destul de repede din proprietățile cunoscute ale oscilațiilor de diferite tipuri de ordine, altele însă rezistînd oricărei abordări uzuale.

Tot atît de elegant se înfățișează și ciclul de lucrări din anii 1932, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940 și 1949 relative la măsurabilitatea funcțiilor uniforme sau multiforme, unde complicațiile tehnice sînt destul de mari. Alex. Froda este primul matematician care a abordat problema măsurabilității funcțiilor multiforme, obținînd condiții necesare și suficiente de măsurabilitate, de altă natură decît cele date de Luzin pentru funcțiile uniforme, dar din care acestea din urmă pot fi deduse. De asemenea, Alex. Froda a obținut mai multe condiții necesare și suficiente, de natură structurală, pentru ca imaginea unei funcții multiforme, de n variabile (adică mulțimea de puncte din spațiul cu $n + 1$ dimensiuni în care funcția se reprezintă geometric) să fie măsurabilă. Într-un articol din 1936, Alex. Froda asociază oricărei funcții uniforme trei funcționale și anume: măsura exterioară, măsura interioară și gradul de măsurabilitate în suport, definite pe baza analizei unor proprietăți aparținînd mulțimilor nemăsurabile de puncte. Considerînd măsura exterioară, respectiv interioară, a mulțimii V verticale de puncte prin care se definește $f(P)$ ca funcție multiformă de P , numește aceste măsuri funcții caracteristice ale măsurabilității verticale a lui $f(P)$ și le notează $v_e(P)$, respectiv $v_i(P)$. Se constată că măsura exterioară $m_e I$, respectiv interioară $m_i I$, a mulțimii imagine I a funcției $f(P)$ nu poate fi inferioară, respectiv superioară valorii integralei interioare, respectiv exterioare, aplicate funcțiilor caracteristice $v_e(P)$, respectiv $v_i(P)$, ale măsurabilității verticale ale lui $f(P)$. În cazul particular în care $f(P)$, ca și fiecare mulțime verticală sînt măsurabile, iar $v(P) = m_e V$ este de asemenea măsurabilă, se obține formula clasică de calcul al măsurii cu ajutorul unei integrale definite.

Rezultate surprinzătoare, obținute în 1938, privesc structura mulțimilor de nivel ale funcțiilor continue de mai multe variabile. Plecând de la un rezultat al său mai vechi care produsese o reacție entuziastă a lui Dimitrie Pompeiu, rezultat conform căruia o funcție continuă de două variabile ia valori egale în cel puțin o pereche de puncte diametral opuse ale oricărui cerc din planul variabilelor, Froda abordează situații mult mai generale, considerând comportarea unei funcții (finite sau nu) în perechi de puncte care se corespund într-o aplicație homeomorfă a unei curbe pe ea însăși (curba fiind situată în planul variabilelor). Comparația valorilor funcției în perechi de puncte corespondente permite să se distingă caracterul punctual sau total discontinuu al funcției considerate. În ultimă instanță, se constată că proprietățile obținute nu sînt specifice funcțiilor continue, ele aparținînd tuturor funcțiilor cu proprietatea lui Darboux (această proprietate fiind adaptată în mod convenabil la funcții de mai multe variabile) și tuturor funcțiilor aproximativ continue (în sensul lui Denjoy). Cu acest prilej, se găsește o proprietate remarcabilă a derivatei unei funcții continue pe $[a, b]$ care ia valori egale în a și b : Fiind dată o astfel de derivată, există un șir infinit și descendent de intervale (deci fiecare interval este inclus în intervalul precedent), fiecare interval fiind de lungime egală cu jumătatea lungimii intervalului precedent și astfel încît la extremitățile unui interval oarecare din șir derivata ia valori egale.

Ca o replică la studiul proprietăților de vecinătate, care i-a absorbit prima parte a carierei sale științifice, Alex. Froda a abordat, între anii 1951 și 1957, un studiu oarecum dual, acela al „proprietăților la distanță”. Nu este vorba pur și simplu de proprietăți globale, ci de o anumită clasă de astfel de proprietăți, anume acelea care angajează relații între valorile funcției în puncte situate la distanță (exemple simple de astfel de proprietăți sînt periodicitatea și aproape periodicitatea). O problemă principală care se pune aici este aceea de a ști dacă și în cadrul proprietăților la distanță se manifestă caractere de distribuție care guvernează totalitatea funcțiilor reale de una sau mai multe variabile reale. Răspunsul afirmativ la această întrebare se obține asociind fiecărui punct P din spațiul euclidian cu n dimensiuni nu o vecinătate — ca în cazul proprietăților locale („de vecinătate”) — ci o așa-numită „para-vecină-

tate", caracterizată axiomatic ca o frontieră jordaniană, în stea, asociată centrului P , astfel încât fiecare punct P_1 al ei să satisfacă dubla condiție ca distanța de la P la P_1 să fie cuprinsă între ρ și 2ρ , unde $\rho > 0$ este o constantă dată. O metodă de cercetare a proprietăților la distanță tranzitive, cum ar fi $f(P) > f(P')$, este o teorie a „lanțurilor dirijate”, aceste lanțuri fiind șiruri finite de puncte la distanțe convenabile și care leagă un punct inițial P_0 de un punct final P_ω . Un pas important mai departe se realizează prin introducerea unei axiome suplimentare în definiția familiilor de para-vecinătăți, care structurează spațiul euclidian cu n dimensiuni. Axioma admite continuitatea para-vecinătăților unei familii $F(\rho)$, în funcție de centrul P al fiecăreia dintre ele. Se studiază modificările caracterelor de distribuție, corespunzătoare introducerii noii condiții.

Printre numeroșii matematicieni români care au studiat noțiuni și probleme datorite lui Dimitrie Pompeiu se numără la loc de frunte și Alex. Froda. În această ordine de idei, contribuția cea mai interesantă pare să fie cea legată de derivata lui Pompeiu (o derivată care se anulează în orice interval, dar nu este identic nulă în nici un interval, se numește „derivată Pompeiu”), despre care am discutat pe larg într-un alt capitol al acestei cărți. Alex. Froda a avut ingenioasa idee de a apropia noțiunea de „derivată Pompeiu” de aceea de „ecuație diferențială de tip Lavrentiev”. Amintim că Lavrentiev obținuse în 1925 un exemplu de funcție continuă $f(x,y)$, astfel încât prin fiecare punct din plan trec cel puțin două soluții distincte ale ecuației $y' = f(x,y)$.

Însă construcția geometrico-analitică a lui Lavrentiev era destul de complicată, în timp ce Froda, folosind derivata lui Pompeiu, obține în 1952, pe o cale elegantă și relativ simplă, un exemplu de funcție $f(x,y)$ cu proprietatea cerută de Lavrentiev (exceptând continuitatea lui f).

O altă contribuție interesantă se referă la celebra problemă a intervalului de contracție. Este vorba de un interval (a',b') , conținut în (a,b) , cu proprietatea că printre punctele ξ din (a,b) în care derivata unui polinom $P(x)$ de grad n , cu coeficienți reali, satisfăcând $P(a) = P(b)$, se anulează, există totdeauna un ξ astfel încât $a' < \xi < b'$, în timp ce

$$\frac{b' - a'}{b - a} < \alpha_n < 1.$$

Un interval (a', b') cu proprietățile de mai sus este, prin definiție, un interval de contracție pentru clasa polinoamelor de grad n , iar minimul lui α_n — în raport cu familia polinoamelor de grad n — este un coeficient de contracție. Acest coeficient fusese determinat de Ciacalov, dar Froda obține în 1949, în cazul particular al polinoamelor care nu admit rădăcini multiple, o demonstrație cu caracter mai elementar. Tot Froda stabilește în 1950 existența unui interval de contracție în cazul general, pe baza unei metode simple, care folosește o teoremă a lui Markov.

Într-un domeniu oarecum vecin cu acela al teoriei funcțiilor reale — anume în teoria mulțimilor — Alex. Froda a obținut unele rezultate care, în afara interesului lor de sine stătător, par să fie utile în unele cercetări de analiză. Avem în vedere în primul rând contribuțiile relative la mulțimile de distanțe. După cum se știe, fiecărei mulțimi A dintr-un spațiu metric i se asociază mulțimea $D(A)$ a distanțelor dintre diferitele elemente ale lui A . Primul rezultat important relativ la mulțimile de distanțe a fost obținut de matematicianul polonez H. Steinhaus, care, în urmă cu vreo 40 de ani, a demonstrat că fiind dată o mulțime reală A de măsură interioară pozitivă, mulțimea $D(A)$ conține un interval de forma $(0, \alpha)$, cu $\alpha > 0$. Contribuțiile ulterioare în acest domeniu — datorite în special lui S. Piccard, care i-a consacrat o carte întreagă (*Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien*, Neuchatel, 1939) — au dezvăluit semnificația deosebită pe care teoria mulțimilor de distanțe o are în studiul diferitelor clase de funcții definite prin inegalități (funcții convexe, funcții subaditive etc.) și, în general, în analiza matematică. Spre deosebire de cercetătorii anteriori, care au studiat mulțimi de distanțe asociate unor mulțimi de natură destul de particulară Alex. Froda abordează, în 1953 și 1954, o problemă foarte generală. Sînt considerate mulțimi din „spațiul euclidian total”, definit ca mulțimea punctelor cu o infinitate numărabilă de coordonate reale. Fiind dată o mulțime L de numere reale, se studiază structura mulțimilor E pentru care $D(E) \subseteq L$. Se demonstrează existența efectivă a unei clase nevide de mulțimi L , astfel încît, oricare ar fi E (cu distanțe inegale între perechi de puncte din E), E să fie minimală (în sensul că numărul punctelor sale reprezintă minimul compatibil cu dimensiunea fiecăreia din submulțimile sale finite: o

mulțime minimală, avînd dimensiunea n , are $n + 1$ puncte, și reciproc) de îndată ce mulțimea $D(E)$ a distanțelor sale este inclusă într-o mulțime L .

O altă contribuție în domeniul teoriei mulțimilor se referă la axioma alegerii. Fiind dată o familie \mathcal{F} de mulțimi abstracte E , se poate întîmpla ca extragerea a cîte unui element din fiecare E să dea naștere unei mulțimi „extrase” $X(\mathcal{F})$, printre elementele căreia să se afle unele egale între ele. Extrasul se va numi, într-un asemenea caz, „impropriu”; în cazul contrar, el va fi „propriu”. Dacă, pentru o familie \mathcal{F} dată, fiecare extras este impropriu, se spune că \mathcal{F} este de clasă (I). Alex. Froda demonstrează existența efectivă a acestei clase și studiază în 1952 proprietățile ei caracteristice.

*

L-am cunoscut pe profesorul Alexandru Froda în jurul anilor 1950, cînd într-o sală mică a Facultății de matematică îi ascultam săptămînal prelegerile de teoria mulțimilor. Considerațiile tehnice alternau cu comentariul de mare finețe — matematică sau filozofică. Nimic nu-i era mai străin decît graba de a umple tabla cu formule și de a trece mai departe. Fire contemplativă, Alex. Froda întîrzia îndelung în fața unui rezultat deosebit, a unei cotituri periculoase într-o demonstrație, a unui aspect paradoxal într-o teorie. O dialectică a detaliului, care la alții alunecă de multe ori în pedantism, se convertea la Froda într-o discuție de înaltă intelectualitate, care căpăta un interes în sine, deci independent de ansamblul din care acest detaliu făcea parte. Froda era prin excelență un gînditor al lucrurilor de început, care se delecta să surprindă aspectele subrede ale unor noțiuni și rezultate care interveneau în întemeierea marilor construcții ale matematicii timpului său. Îi plăcea să zăbovească contemplativ la izvoarele disciplinelor matematice, fiind atras cu deosebire de faptele care intrau în conflict cu aparențele. A urmărit cu pasiune dezbaterile furtunoase din deceniile al doilea și al treilea ale secolului nostru, privind paradoxurile infinitului și a rămas toată viața captivat de această problemă. În relații apropiate cu unii din marii protagoniști ai acestor dezbateri, ca Émile Borel și Arnaud Denjoy, Froda a fost un matematician de formație prin excelență

franceză, fapt care se acorda perfect cu legăturile sale strânse cu matematicienii ca Dimitrie Pompeiu și Simion Stoilow, și ei formați la Paris.

La una din prelegeri, prof. Froda ne-a evocat un episod din 1928, când prezentase, într-o ședință a Societății române de matematică, rezultatul său privind discontinuitățile de prima specie ale unei funcții reale arbitrare, de o variabilă reală. Traian Lalescu a avut o reacție de uimire, exprimându-și îndoiala asupra unui rezultat care părea să contrazică natura arbitrară a funcției considerate. Aceasta era starea de spirit de atunci în matematica românească. Proprietăți ale funcțiilor reale arbitrare, de o variabilă reală, fuseseră puse în evidență încă de la începutul secolului nostru, de către Young, Blumberg și alții, dar ele erau încă străine de mentalitatea matematică dominantă, înțelegerea lor venind abia ulterior. Dealtfel, așa cum arătăm în altă parte în această carte, un alt matematician român, Florin Vasilescu, publicase încă în 1927 o teoremă care se referea la toate funcțiile reale de o variabilă reală.

Tocmai acest caracter paradoxal al proprietăților aparținând tuturor funcțiilor reale l-a atras pe Froda și l-a urmărit de-a lungul întregii sale activități matematice. Principalele reușite pe care le-a înregistrat în această privință se referă la clasificarea punctelor de discontinuitate și la proprietățile mulțimilor care rezultă din această clasificare. O tentativă care din păcate a eșuat se referă la teorema lui Blumberg, care afirmă că orice funcție reală definită într-un interval n -dimensional admite o restricție continuă pe o mulțime densă. În 1958, Alex. Froda a crezut că a putut extinde acest rezultat la funcții reale definite într-un spațiu metric oarecare. Dar cercetări ulterioare, ale altor autori, stimulate tocmai de această tentativă, au infirmat această posibilitate, limitând valabilitatea proprietății lui Blumberg la anumite clase de spații metrice, printre care și spațiile metrice cu bază numărabilă. „Eroarea poate deveni o sursă prețioasă a adevărului matematic” scria Alex. Froda în introducerea la ultima sa carte *Eroare și paradox în matematică* (Editura enciclopedică română, București, 1971). Acest dicton s-a confirmat, după cum se vede, în cazul greșelii lui Froda privind teorema lui Blumberg. El s-a confirmat și cu prilejul unei alte frumoase erori, din 1965, când Froda

a exclamat, în titlul unui articol: *Constanta lui Euler — o irațională*. (Constanta C a lui Euler este, prin definiție,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,57721\dots$$

Problema de a se stabili dacă C este un număr irațional și, în cazul afirmativ, dacă această irațională este algebrică, nu a fost încă rezolvată.) Venerabilul matematician norvegian Viggo Brun avea să identifice punctul slab în demersul lui Froda, dar din această tentativă s-au născut câteva criterii parametrice de iraționalitate al căror interes este de necontestat. Acest episod vine ca o replică îndepărtată la un altul, petrecut cu vreo zece ani mai devreme, când un student a crezut că a stabilit iraționalitatea constantei lui Euler și când profesorul Froda a fost cel care a sesizat caracterul vicios al argumentării. Dealtfel, Froda s-a dovedit, de mai multe ori de-a lungul carierei sale matematice, un maestru al identificării unor puncte subrede în considerații matematice de o aparență ireproșabilă. În tinerețe, a găsit o greșeală în modul în care Émile Borel prezenta un rezultat al lui Hadamard privind polii unei funcții meromorfe, greșeală pe care a comunicat-o lui Borel printr-o scrisoare și pe care acesta nu a putut-o contesta. Tot Froda este cel care a identificat o greșeală în tratatul de algebră, odinioară de mare reputație, al lui Charles de Comberousse, în demonstrația teoremei, dealtfel bine cunoscută ca adevărată, care afirmă că atunci când un polinom întreg în raport cu x este identic nul, toți coeficienții săi sînt nuli. Recenzînd un articol al matematicianului american Ky Fan, care colaborase altă dată cu Fréchet, Alex. Froda a observat că generalizarea la n oarecare pe care Ky Fan o propunea pentru o teoremă dată de Banach în cazul $n = 2$ era în fapt valabilă numai pentru n par.

În lunga sa carieră, Alex. Froda a adus contribuții în numeroase domenii ale matematicii, de la analiză la algebră și de la teoria numerelor la mecanică. Dar, dincolo de această eterogeneitate a preocupărilor sale, un ochi atent poate observa că în mai tot ceea ce a făcut mai deosebit Alexandru Froda a introdus spiritul teoriei mulțimilor și al analizei matematice, spirit dominant în creația sa. Cercetările asupra zerourilor polinoamelor derivă din preocupări de analiză, la fel ca și cele privind intervalul

de contracție. Originea în analiza reală a preocupărilor sale de teoria analitică a numerelor este evidentă, criteriile de iraționalitate fiind direct legate de procesele de convergență din teoria șirurilor. Impregnate de spiritul teoriei funcțiilor de variabilă reală sînt și preocupările sale privind fundamentele mecanicii. Froda pleacă de la observația că axiomatizarea mecanicii newtoniene, așa cum a fost ea întreprinsă între 1909 și 1929 de către matematicianul german Georg Hamel și chiar mecanica rațională actuală lasă deoparte mecanica relativității generale și mecanica cuantică și ignoră rezultatele obținute în domeniul analizei matematice de la mijlocul secolului trecut încoace. Froda are în vedere în mod special existența funcțiilor continue fără derivată, fapt care-l determină să conteste existența vitezei și accelerației în orice mișcare realizabilă și în orice moment al ei. Această situație îl conduce pe autor la o propunere interesantă, conform căreia ipoteza așa-numitului principiu fizic după care toate mărimile fizice observabile sînt continue și continuu diferențiabile (principiu care stă la baza axiomatizării mecanicii newtoniene propuse de Hamel și revăzută de autori ca H. Herz, P. Painlevé, L. Zoratti, P. Appell, M. Brelot) trebuie înlocuită cu anumite postulate de finitudine care rezultă dintr-o confruntare a experienței fizice cu aspectele matematice contemporane ale teoriei funcțiilor reale. Aceste postulate, propuse într-o lucrare amplă din 1952, ar urma să completeze axiomele deja existente ale mecanicii raționale (minus existența vitezei și accelerației în orice mișcare realizabilă și în orice moment al ei). Ideile din 1952 ale lui Alex. Froda au stîrnit un anumit ecou, care a determinat pe organizatorii Simpozionului internațional de la Berkeley (California) din 1958, asupra metodei axiomatice, să-l invite pe Froda de a prezenta un raport asupra cercetărilor sale privind finitudinea în mecanica clasică, axiomele și implicațiile ei, raport care a fost publicat în Actele simpozionului.

Inițiativa lui Alex. Froda de a renova bazele axiomatiche ale mecanicii clasice, în spiritul teoriei moderne a funcțiilor reale, constituie o alternativă la un program mai amplu, formulat anterior de către marele matematician francez Arnaud Denjoy. Froda nu face nici o referire la acest program. Ideea principală a lui Denjoy consta în observația că analiza clasică, bazată pe calculul diferențial și integral

al lui Leibniz și Newton, corespunde perfect concepțiilor care stau la baza fizicii clasice, însă concepția discontinuă despre materie, care stă la baza fizicii moderne, nu poate fi modelată decât cu instrumentele mai fine puse la dispoziție de teoria continuității și derivatei aproximative (asimptotice) în sensul lui Denjoy și Hincin. Amintim că noțiunile de continuitate și derivată aproximativă într-un punct x se obțin înlocuind în definițiile noțiunilor clasice corespunzătoare limita ordinară cu limita prin mulțimi care admit punctul x ca punct de densitate. (Mulțimea liniară A admite punctul x ca punct de densitate dacă A este măsurabilă și dacă

$$\lim_{\mu(I) \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap I)}{\mu(I)} = 1,$$

unde I este un interval oarecare centrat în x iar $\mu(B)$ este măsura mulțimii B).

Evident, așa cum continuitatea nu implică derivabilitatea, continuitatea aproximativă nu implică derivabilitatea aproximativă. Mai mult, se știe că o funcție poate fi continuă în orice punct și în același timp să nu aibă derivată aproximativă în nici un punct. Putem deci defini o noțiune de viteză aproximativă și putem concepe mișcări continue care nu posedă în nici un moment o viteză aproximativă. Rezultatele obținute de către Denjoy, Hincin, Tolstov și alți matematicieni permit să se determine condițiile în care se poate defini o accelerație aproximativă și raporturile ei cu accelerația propriu-zisă, cu viteza și viteza aproximativă și cu continuitatea și continuitatea aproximativă a unei mișcări mecanice. Să observăm doar că, în timp ce Froda reține proprietatea de continuitate a mișcării, renunțând la obligativitatea vitezei și accelerației, Denjoy nuanțează înseși noțiunile de continuitate, viteză și accelerație, generalizându-le în așa fel încât clasa mișcărilor dotate cu viteză și accelerație devine mult mai largă decât în cazul concepției clasice.

Însă interpretarea fizică cea mai interesantă a noțiunii de derivată aproximativă pare să fie noțiunea de densitate aproximativă a unui corp într-un anumit punct. Nu cunoaștem dacă și în ce fel fizica matematică a valorificat sugestiile lui Denjoy. Știm însă că alte concepte ale analizei reale, cum ar fi proprietatea lui Darboux, au fost valorificate.

Dar nu există încă studii mai sistematice, care să urmărească impactul teoriei moderne a funcțiilor reale asupra bazelor matematice ale fizicii moderne.

*

Froda rămîne în istoria matematicii românești ca un matematician cu o personalitate pregnantă, care și-a urmat drumul propriei sale meditații mai degrabă decît pe acela care părea să fie drumul principal al momentului. Așa se și explică, probabil, relativa lipsă de ecou a unor construcții totuși atît de frumoase și de încheigate cum sînt tipologia discontinuităților funcțiilor reale și studiul proprietăților la distanță. Nu ne îndoim că printre matematicienii noilor generații se vor găsi unii care să reia aceste construcții solitare și să le plaseze în contextul susceptibil de a le reliefa întreaga lor monumentalitate.

După Omar Khayyam, istoria culturii nu cunoaște decît un singur exemplu de creator de înaltă valoare în fiecare dintre cele două domenii — rege ale cunoașterii, poezia și matematica. Acesta este poetul Ion Barbu, cunoscut ca matematician sub numele Dan Barbilian.

Omar Khayyam a trăit într-o perioadă (secolele XI—XII) în care diferențierea diferitelor domenii ale cunoașterii, gradul lor de specializare erau încă foarte slabe. În aceste condiții, o activitate simultană în poezie și în matematică apare oarecum explicabilă, chiar dacă ea se soldează cu rezultate ieșite din comun în fiecare dintre cele două domenii, așa cum s-a întîmplat cu Omar Khayyam. Rubaiatele sale sînt la fel de celebre ca și Algebra sa.

O repetare a acestui fenomen în zilele noastre, în condițiile unei maxime specializări a științelor și artelor, este de-a dreptul surprinzătoare. Ea a fost totuși realizată de către Ion Barbu.

Poeți-matematicieni au mai fost, dar ei n-au realizat această dublă performanță de a atinge suprema mărime atît ca scriitori, cît și ca matematicieni. Este bine cunoscut exemplul lui Lewis Carroll, autorul lui *Alice în țara minunilor* și al studiului asupra sistemelor liniare, cu coeficienți reali sau imaginari, semnat Charles L. Dodgson. Dar dacă *Alice în țara minunilor* rezistă unei selecții severe, este greu de spus același lucru despre opera matematică a lui Charles L. Dodgson.

Poetul Ion Barbu, matematicianul și profesorul Dan Barbilian sînt ipostaze ale uneia și aceleiași personalități. Dacă despre poet s-a scris destul de mult, despre matematician și profesor s-a scris foarte puțin, iar publicarea relativ recentă a operei sale matematice atrage atenția asupra acestui fapt. Cunoașterea ipostazei de matematician a lui Ion Barbu este de natură să contribuie esențial la înțelegerea profundă a activității sale poetice, deoarece

personalitatea poetică a lui Ion Barbu poartă marca formației sale matematice (vezi acad. Al. Rosetti și Liviu Călin, Cuvînt înainte la *Ocean*, Editura pentru literatură, București, 1964, p.VII).

Î-am cunoscut pe prof. Dan Barbilian, ca student al său, în anii imediat următori celui de-al doilea război mondial, ani care se caracterizează, în activitatea sa științifică, prin trecerea din ce în ce mai pronunțată de la vechile sale preocupări de geometrie, cărora le consacrase anii tinereții, la abordarea unor probleme fundamentale ale algebrei moderne și ale teoriei numerelor. Unul dintre marile merite ale lui Dan Barbilian îl constituie faptul de a fi fost printre primii care au introdus la noi în țară preocupările de algebră modernă — algebră axiomatică, cum îi plăcea s-o numească. Introducerea algebrei moderne în învățămîntul matematic universitar din țara noastră este incontestabil legată și de numele său. Bine cunoscut în cercurile specialiștilor din întreaga lume, Dan Barbilian este autorul unor rezultate importante de algebră și al unor spații care-i poartă numele. Este remarcabilă, în opera sa matematică, luciditatea cu care intuiește de fiecare dată liniile principale ale dezvoltării ulterioare.

Dan Barbilian creează opera sa algebrică într-o perioadă în care, după un proces îndelung de acumulare a numeroase fapte particulare, se simțea nevoia unei organizări a acestui material, o ierarhizare a sa, prin desprinderea unor structuri generale. Tocmai în această algebră așa-numită nealgoritmică s-a manifestat, după cel de-al doilea război mondial, activitatea creatoare a lui Dan Barbilian, activitate care reeditează, pe un alt plan și cu alte mijloace, tendința pronunțată, spre aspectele abstracte, de extragere a esențelor, pe care poetul o manifestase în urmă cu ani, în ciclul *Joc secund*.

În preajma celei de-a 80-a aniversări a nașterii sale (Barbilian s-a născut la 19 martie 1895), Ed. Tehnică a publicat cel de-al treilea volum al operei sale didactice, cuprinzînd unele cursuri speciale predate la Universitatea din București. Cele două volume anterioare, publicate în 1968 și, respectiv, în 1971, au cuprins textul unor cursuri de geometrie elementară și de algebră elementară, toate predate înainte de anul 1944.

Prezența cuvîntului *elementară* în denumirea unora dintre cursurile lui Barbilian nu trebuie să înșele. Cînd,

în 1932, a ocupat, prin concurs, conferința de matematici elementare și geometrie descriptivă, Barbilian a precizat că domeniul matematicilor elementare corespunde chiar dezvoltării istorice a matematicii în antichitatea greacă, în evul mediu, în perioada Renașterii și în prima parte a erei moderne, pînă pe la mijlocul secolului al XVII-lea, cînd geometria analitică a lui Descartes și calculul diferențial și integral al lui Newton și Leibniz marchează o eră cu totul nouă în dezvoltarea matematicii. Dar dacă principalele teorii elementare erau deja încheiate către mijlocul secolului al XVII-lea, o nouă renaștere a doctrinelor elementare — cel puțin în ceea ce privește geometria — se observă abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. Alături însă de obiectul elementar al matematicii există și o gîndire matematică elementară, care se manifestă, după Barbilian, prin „tendința de a concepe adevărurile matematice noi tot în limitele vechilor tipare, familiare și armonioase”. Matematicile elementare sînt, pentru Barbilian, „matematici de întemeiere”, iar spiritul elementar, în sensul precizat mai sus, reprezintă un fel de „clasicism al matematicilor”. Barbilian își propune — și cît de frumos reușește! — nu numai să prezinte matematicile elementare, „acele cunoștințe care, asemenea și dimpreună cu ilustrele *Elemente* ale lui Euclid — de unde își trag numele — formează Carta însăși, constitutivă a matematicilor superioare, cît și a matematicilor aplicate”, dar să și „favorizeze” dezvoltarea gîndirii elementare, motivînd că „spiritul matematic de cercetare, în momentele lui de valabilă activitate, procedează elementar, adică prin combinare de părți simple, luate în număr finit”.

Am insistat asupra acestui punct de doctrină din opera lui Barbilian, deoarece el explică, în bună măsură, și obiectul și metoda multora dintre cursurile sale republicate în cele trei volume menționate. Mai mult, o bună parte din opera științifică a lui Barbilian (înțelegînd prin aceasta opera publicată sub formă de articole de revistă sau monografii) stă sub semnul aceleiași „elementarități” care nu are nimic comun cu spiritul rudimentar cu care, cum observă Barbilian, gîndirea curentă deseori o confundă. Este locul aici să amintim că paralel cu opera didactică se întreprinde și republicarea operei științifice originale a lui Barbilian, din care au apărut, la Ed. Didactică și Pedagogică, două volume (unul consacrat geometriei,

altul algebrei) în 1967 și un al treilea, în 1970, consacrat lucrărilor cu caracter elementar. Prefațatorul acestui din urmă volum, academicianul Gheorghe Vrănceanu, precizează că „deși aceste *Note* sînt cu caracter elementar, expunerea lor face apel în cele mai multe cazuri la teorii matematice înalte”.

Un alt punct important de doctrină în opera lui Barbilian se referă la axiomatică și a făcut obiectul lecției sale de deschidere din 1942. Textul acestei lecții este reprodus în volumul al treilea al operei didactice. „Mai puțin stearpă decît critica literară față de literatura propriu-zisă, axiomatica se apropie totuși de cea dintîi prin preocuparea de a construi sinteze valabile nu între unități simple, ci între unități compozite, puse la îndemîină de o activitate anterioară”. Așa cum critica este „arta de a gândi prin cărți”, matematica este, pentru Barbilian, arta de a gândi prin teoreme, iar axiomatica arta de a gândi prin doctrine. „O doctrină a doctrinelor, o matematică la puterea a doua”, axiomatica se referă la marile sinteze de fapte matematice, sinteze pe care le pune în relație, așa cum critica literară pune în relație operele literare. Mecanica newtoniană, mecanica relativistă, topologia, teoria lui Galois a ecuațiilor, teoria funcțiilor automorfe sînt, pentru Barbilian, alături de discipline mai vechi ca geometriile euclidiene, neeuclidiene, proiective, circulare, doctrine matematice (sînt, toate, extensiuni ale așa-numitelor geometrii ale Programului de la Erlangen). O doctrină matematică este, pentru Barbilian, un sistem închis de cunoștințe, în sensul că oricare ar fi numărul teoremelor dezvoltate în interiorul ei, nu părăsim niciodată un cadru prealabil fixat; în ceea ce privește exemplele date, acest cadru este obținut de faptul că toate rezultatele obținute pot fi interpretate ca invariante ai grupului fundamental. O situație diferită o prezintă discipline ca analiza (cu excepția anumitor ramuri, cum ar fi teoria lui Lie a ecuațiilor diferențiale), teoria probabilităților, numeroase capitole ale algebrei; acestea sînt sisteme deschise de cunoștințe, de aceea scapă axiomaticii. Ele sînt încă discipline doar axiomatizante (nu axiomatizate!), iar Barbilian se întreabă dacă ele vor atinge acea perfecțiune a disciplinelor axiomatizate, care, pentru el, se confundă cu doctrinele Programului de la Erlangen.

Astăzi știm că răspunsul la întrebarea de mai sus este negativ sau, mai degrabă, că întrebarea trebuie altfel

formulată. Dar distincțiile fine introduse de Barbilian își păstrează în întregime interesul. Mai mult, raza lor de acțiune se mărește acum, odată cu pătrunderea gândirii matematice în toate domeniile de cercetare.

Trebuie să menționăm rîvna deosebită a prof. N. Mihăileanu, îngrijitorul operei didactice și autorul unui studiu introductiv, care aduce multe informații utile. În condițiile în care multe dintre cursurile lui Barbilian n-au mai rămas decît în exemplare izolate, uneori unicate în posesia unor persoane particulare, adunarea lor laolaltă, într-o formă coerentă și chiar sistematică, a prezentat multe dificultăți, pe care prof. Mihăileanu le-a învins, în cea mai mare parte.

Dan Barbilian era un mare contemplativ. Nu înceta nici o clipă să se mire în fața structurii matematice a universului, întîrziind îndelung în fața fiecărei proprietăți noi, cu o prospețime și un neastîmpăr al spiritului în care omul de știință și poetul erau deopotrivă prezenți.

Figura profesorului Dan Barbilian a stîrnit multe discuții și controverse. Era, într-adevăr, un om ciudat în multe din manifestările sale și, în particular, în relațiile sale cu studenții. El nu putea concepe altă atitudine față de știință decît aceea a pasiunii și a dăruirii totale. Plin de dragoste față de studenții care iubeau matematica, el își manifesta deschis dezaprobarea față de ceilalți.

Profesorul Dan Barbilian presta un mare număr de ore peste obligațiile care-i reveneau. Îmi aduc aminte că în iarna anului universitar 1945—1946 venea aproape zilnic la facultate, în jurul orei 15,30, fie pentru a-și ține cursul, fie pentru a vizita orele de seminar, unde intervenea deseori în discuții. Simțea o nevoie organică de a-și comunica șirul reflecțiilor sale matematice. Lecțiile sale nu erau conferințe, nu aveau cursivitate și nici spirit sistematic, fapt care nemulțumea pe acei studenți care doreau în primul rînd să ia notițe bune, după care să-și poată pregăti cu ușurință examenul. O oră de curs era, pentru Dan Barbilian, în primul rînd un prilej de a se mărturisi, de a se elibera de frămîntările sale matematice recente. O stare febrilă îl stăpînea înainte de a-și începe lecția, o stare probabil asemănătoare celeia care-i stăpînește pe marii actori, înainte de a intra în scenă. În prima parte a unei ore de curs, Dan Barbilian relua de obicei chestiunile din lecția precedentă, „regîndite aseară”, după cum obișnuia de multe ori să spună. Cu acest prilej, el corecta unele aserțiuni din propria-i lecție, retracta altele,

punându-ne în situația de a suprima o parte — uneori substanțială — a notițelor luate anterior. Dar chiar în timp ce făcea efortul de a ne prezenta reflecțiile sale ulterioare ultimei lecții, gândurile care-l vizitau ad-hoc îi tulburau din nou expunerea și dacă, sub raport strict didactic, aceasta lăsa de dorit, ținuta de înaltă intelectualitate a savantului în plină efervescență a ideilor oferea un spectacol de-a dreptul captivant. Profesorul Dan Barbilian era lipsit de spontaneitate chiar în chestiuni cu caracter relativ elementar, dar această „încetineală” a gândirii, explicabilă dacă ținem seamă de firea sa contemplativă, de gustul său pentru reverie, era compensată de o profunzime neobișnuită a cugetării. Așternute pe hîrtie, expunerile sale matematice sînt, în opoziție cu expunerile sale orale, de o claritate deplină, deosebit de sistematizate și de o rigoare care merge uneori pînă la pedantism; se simte parcă influența stilului cărților germane de matematică, pe care le-a frecventat îndeosebi. Dar atît expunerile sale matematice orale, cît și cele scrise se remarcă prin limbajul lor colorat, bogat în cuvinte vechi, care înlocuiau neologisme uzate, lipsite de imagine (*mulțime deșartă* în loc de *mulțime vidă*, *înțeleală* în loc de *viteză*, *petec* în loc de *porțiune*, *stăpînește* în loc de *este în vigoare*), dar în același timp surprindeau prin folosirea unor neologisme în contexte inedite, prin înlocuirea unor cuvinte vechi sau a unor neologisme uzate prin neologisme proaspete sau chiar prin creații proprii (*radiarea* în loc de *suprimarea*, *brutală* în loc de *tare*, *ansamble* în loc de *mulțimi*, *refontă* în loc de *reconstrucție*, *mai laxă* în loc de *mai puțin restrictivă*, *agregate* în loc de *expresii*). Cele mai abstracte formațiuni matematice i se înfățișau probabil într-o reprezentare a universului sensibil, de exemplu sub forma unei vegetații luxuriante, ca în *Teoria aritmetică a idealelor* (Ed. Academiei, București, 1956), unde pagini întregi par desprinse dintr-o carte de botanică sau dintr-un manual de horticultură, prin termeni ca *arbore*, *parc*, *boschet*, *co-roană*, *încoronare* etc. și prin teoreme ca „Boschetele sînt cazuri particulare de parcuri”. Textele sale matematice, deși abundă în termeni metaforici, își păstrează claritatea și precizia. Cine oare va demonta acest mecanism alcătuit din piese atît de fine și eterogene, care este limbajul textelor matematice ale lui Barbilian, pentru a explica în ce fel anume se interferează la el și ajung la o coexistență armonioasă două tendințe atît de opuse ale limbajului uman

cum sînt tendința spre rigoarea științifică și tendința spre ambiguitatea lirică? Ceea ce căuta Barbilian nu era cuvîntul rar, ci cuvîntul adecvat și, în același timp, proaspăt, care să facă imagine. Căuta? Ajungea la el în mod firesc, fără efort! Stilul textelor sale matematice nu este ceva adăugat, ci intră ca o componentă organică a universului său de gîndire. „Matematicile, la fel cu celelalte activități omenesti, ridică probleme de stil, care nu pot fi indiferente filozofilor culturii” scria el încă în 1943 (în revista „Numerus”, vol.10, p.65). De aceea, nu trebuie să ne mire că undeva (*Îndrumar metodic al cursului de geometrie*, Universitatea București, secția fără frecvență, 1953/1954, p.6) face studenților următoarea recomandare: „În redactare nu are atîta preț poleirea frazelor, cît organizarea ideilor”. Pentru Dan Barbilian expunerea orală nu era un scop, ci doar un mijloc pentru pregătirea expunerii scrise, singura edificatoare. Astfel, tot în *Îndrumarul* citat (p.6) spune: „Nu există matematice vorbite (decît la examene și în congresele matematicienilor). Un adevăr matematic nu poate fi primit ca achiziționat decît dacă e prezentat scris și dacă rezistă verificării oamenilor competenți”. Dan Barbilian făcea o distincție netă între considerațiile matematice propriu-zise și comentariile pe marginea acestora. Primele trebuiau să se supună unei austerități desăvîrșite, orice înlocuire a silogismului prin intuiție fiind o inadvertență față de rigoarea științifică. „Desenul corupe raționamentul” scria el în *Îndrumarul* citat (p.14). În ceea ce privește însă comentariul pe marginea dezvoltărilor matematice propriu-zise, Dan Barbilian își permitea cele mai îndrăznețe analogii și excursii ale spiritului. Pentru ca să folosim propriile sale cuvinte, vom spune că operele matematice îl robeau și-l încîntau întocmai ca operele pasiunii și imaginației. („Numerus”, vol.10, 1943, p.64).

Spuneam că lecțiile lui Dan Barbilian nu aveau caracterul unor conferințe. O singură dată și-a transformat lecția într-o conferință: atunci cînd și-a ținut lecția de deschidere la cursul de teoria lui Galois, lecție care mi-a prilejuit prima întîlnire cu profesorul Barbilian și pe care nu o voi uita niciodată. A intrat în sala de curs, sprijinindu-se în bastonul de care nu se despărțea niciodată, și a trecut printre rîndurile de bănci, dînd mîna cu fiecare student în parte, recomandîndu-se și interesîndu-se de calificativul obținut la examenul de algebră din anul întîi (cursul pro-

fesorului Barbilian se adresa studenților din anul al doilea). Reacționa nuanțat, înseninându-se sau încruntându-se, după cum calificativul era bun sau slab. O dată terminată această minuțioasă luare de contact, a ieșit dintre bănci, a scos din buzunar câteva însemnări și, după o scurtă tăcere, și-a anunțat prelegerea de deschidere *Évariste Galois și ideea de grup*. Prelegerea ne-a impresionat, deși înțelegeam foarte puțin din referirile matematice pe care le conținea. Geniul algebric al lui Galois, acest matematician ucis în duel la douăzeci și ceva de ani, după ce se manifestase ca un antiregalist convins în timpul evenimentelor clocotitoare ale Franței anilor 1830 și suportase rigorile închisorii Sfânta Pelagia, nu putea să nu fascineze pe Dan Barbilian, care vedea în Galois o prefigurare a acelui mare poet ce avea să reediteze, cu patruzeci de ani mai târziu, în timpul Comunei din Paris, o împletire analogă de geniu și neconformism: „Iată viața violentă a acestui de tot mare matematician. Ea poate fi pusă în paralelă cu genialitatea la fel de timpurie, cu radicalismul arzător și mai ales cu neconformismul unui alt mare francez: poetul Arthur Rimbaud, unul din incendiarii Comunei de la 1870” (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Teoria lui Galois în axiomatizarea lui Steinitz. Ed. Facultății de științe din București, 1945—1946, p.10). Memorabile sînt acele pasaje ale lecției care învie zilele petrecute de Galois în închisoare:

„În această a doua ședere la Sfânta Pelagia, își va fi adîncit Galois ideile lui algebrice și mai ales analitice: printr-o muncă de cap, fără însemnări, în interminabilele preumblări prin curtea închisorii, luat în rîs de patrioții, oameni din popor, închiși odată cu dînsul, silit adesea să ia parte la bețiile lor de rachiu, procurat prin contrabandă de paznici, adevărată otravă pentru organismul său subred”.

„Aceste scene, puțin înălțătoare, erau răscumpărate însă seara printr-un ritual impresionant. Deținuții politici se adunau în curtea închisorii, înainte de sunarea stingerii, în jurul unui tricolor, să cînte imnuri patriotice, sfîrșind totdeauna cu Marseilleza. La cuvintele *«Amour sacré de la Patrie»* toți îngenuncheau. De sus, din celulele de lîngă streășină, corul copiilor condamnați pentru vagabondaj... relua accentul Marseillezei și culmina cu imnul tineretului republican de pe atunci *«Nous entrerons dans la carrière | Quand nos aînées n'y seront plus ; |...| Nous aurons le sublime orgueil| De les venger ou de les suivre»*”.

„Bătrînii defilau apoi pe dinaintea tricolorului, îi sărutau aplecați faldurile, ca să urce apoi în celulele lor înghețate, unde Galois relua, de-a lungul ceasurilor de insomnie, firul întrerupt al meditațiilor lui matematice”.

De obicei însă lecțiile lui Dan Barbilian aveau caracterul unor ore de lucru, care-ți dădeau prilejul să pătrunzi în laboratorul său de creație, să te insinuezi în preocupările sale științifice. Nu-i plăceau expunerile ex-catedra, ci lecțiile de tip seminar; dorea să lucreze cu sala, să simtă participarea ei, îi solicita opiniile, o interpela, era pasionat de schimbul de replici cu studenții talentați, vioi, spontani, care-l urmăreau cu interes. Absorbit de firul expunerii matematice, Dan Barbilian pierdea simțul realității și era tentat să vadă în orice student din bancă un pasionat în ale algebrei. Se spune că poezia presupune o doză de naivitate. Și matematica presupune o doză de naivitate. Voi relata o întâmplare cu Dan Barbilian, semnificativă în această privință.

Într-o zi se afla în sala de curs (pe lângă studenții obișnuiți) și un cetățean „în vizită”. Profesorul Barbilian, după obiceiul său de a interpela pe studenți, l-a interpellat și pe acest cetățean, care a răspuns însă printr-o tăcere totală. Atunci, profesorul, puțin scandalizat, i-a cerut să definească o noțiune de bază a cursului, aceea de „grup”. Cetățeanul a tăcut și de astă dată, spre supărarea ajunsă la apogeu a profesorului. Un student se ridică sfios și atrase atenția că cetățeanul în cauză nu este student, nu e „de la noi”¹. Dar replica prof. Barbilian veni promptă și gravă: „Oricît, noțiunea de grup este o chestiune fundamentală!”.

Profesorul Barbilian imaginase, pe lângă calificativele obișnuite (insuficient, suficient, bine și foarte bine), două calificative noi: „foarte bine cu elogii” și „foarte bine cu distincție”. Primul dintre aceste calificative nu a fost acordat decît o dată (lui A. Halanay), cel de-al doilea de cîteva ori, dar foarte rar. Mi s-a povestit că înainte de război acorda studenților care obțineau prea ușor aprobarea de a fi mereu reexaminați, deși pregătirea lor se dovedea a fi mereu insuficientă, calificativul „suficient cu scîrbă”.

La un examen cu Barbilian era recomandabil să părăsești sala imediat după ce ai primit calificativul de trecere. Un

¹ Era o zi de iarnă geroasă și omul intrase să se încălzească.

student care întârziase să-și îmbrace paltonul și să-și strângă cărțile, după ce luase examenul, a fost din nou interpelat, într-o chestiune la care candidatul următor nu răspunse. Neputînd răspunde, studentului i s-a retras calificativul de trecere.

Aceste capricii ale comportării sale nu pot ascunde totuși conștiinciozitatea sa profesională, care uneori se manifesta — este adevărat — de o manieră originală, dar nu mai puțin fermecătoare. Pentru a ilustra acest fapt, mă voi referi din nou la *Îndrumarul* metodic al cursului de geometrie, deja citat mai sus. Acest *Îndrumar* se adresa studenților de la secția fără frecvență și, inițial, era prevăzut ca un ansamblu de instrucțiuni cu caracter tehnic, menite să orienteze pe acești studenți, în absența posibilității de a discuta direct cu profesorii și cu asistenții. Profesorul Barbilian nu s-a mulțumit însă cu atât, deși nimeni și nimic (în afară de propria sa conștiință!) nu-l obligau la mai mult. În loc de cîteva pagini redactate rutinar, așa cum se obișnuiește în asemenea cazuri, Barbilian a scris un adevărat studiu, de proporțiile unei cărți, în care considerații profunde asupra naturii matematicii și uceniciei în studiul creator al matematicii se împletesc cu sfaturi practice de detaliu. Dealtfel, această grijă pentru semnificațiile de ordin general ale lucrurilor, pentru formarea științifică a studentului străbate și din celelalte cursuri ale sale. Am dat mai sus cîteva citate ilustrative în acest sens. Iată și altele: „Datele numerice trebuie controlate de aproape, ca să concorde cu natura lucrurilor sau cu condițiile practice. Astfel se va corecta o problemă în care e vorba de un pătrat cu latura 1 și diagonala 3, căci conform unei teoreme diagonala pătratului de latură 1 e $\sqrt{2}$. De asemenea nu pot fi primite date ca acestea: cateta de 2 metri și ipotenuza de 1,5. Tot astfel probleme cu meridiane ale pămîntului mai mari decît 400 milioane de kilometri, trenuri cu iuțeli ca ale luminii etc.” (*Îndrumar*, p.7). „Știința e o construcție obiectivă, care se desfășoară în afară de noi, devenită aproape anonimă prin mulțimea contribuțiilor care i se aduc. Întocmai ca și în arhitectura caracterelor, detaliile ieșite din mîna vreunui meșter iscusit se pierd în marele efort colectiv” (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Ed. Facultății de științe din București, 1945—1946, p.10). „Trebuie să admirăm deci drumurile tănuite ale creației matematice geniale, care

(întocmai ca topologia, în definiția lui Poincaré: arta de a raționa exact pe figuri greșit făcute) pare a fi, împingând lucrurile pînă la butadă, arta de a judeca bine cu idei rău sau incomplet formulate" (același curs, p.12). „... ținem să atragem atenția asupra curioasei solidarități între adîncimea teoretică și eficiența practică, așa de des verificată în matematică" (același curs, p.397). „Asperitățile începuturilor trebuie nivelate, iar sagacitatea cititorului lăsată să se îndrepte asupra unor adevărate exerciții, nu asupra unor puncte de doctrină travestite în probleme. Altfel, munca de asimilare devine penibilă". (*Grupuri cu operatori*, Ed. Academiei R.P.R., 1960, p.6). De multe ori, reflecțiile lui Barbilian ating ipostaza matematicii ca fenomen de cultură: „A vedea în matematică o simplă colecție de probleme ierarhizate după greutatea lor, e o concepție fragmentară de tehnician" („Numerus", vol.10, 1943, p.74); „Criza civilizației științifice grecești a fost imposibilitatea de a concepe numărul irațional. Nu cucerirea romană, ci infirmitatea lor de a depăși anumite prejudecăți privitoare la rigoarea matematică, de a accepta și alte moduri de existență matematică, istovește curînd geniul grec. Arhimede singur face o excepție. Prin aceasta, Arhimede aparține mai mult evului celui nou" (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Ed. Facultății de științe din București, 1945—1946, p.5).

Printre diferitele comentarii presărate de Barbilian în cursurile și articolele sale de matematică, un loc special îl ocupă cele privitoare la legătura matematicii cu poezia. Iată o reflecție simptomatică pentru mutarea centrului de greutate al preocupărilor sale de la poezie la algebră: „Cădența universală a semnului matematic consolează ușor de pulsația greoaie a versului" („Numerus", vol. 5, 1939, caietul 42, p.28). Dar iată, în același loc, exprimarea unei idei duale: „... simplul fapt al vestirii unei ore de seară are nevoie de mai mult decît cele cîteva cifre ale notației astronomice; are nevoie de toată amplitudinea unui vers" („Numerus", vol.5, 1939, caietul 42, p.30). În aceste două afirmații — numai aparent contradictorii — se află poate una din marile dileme ale activității poetului-matematician, permanenta sa oscilare între ceea ce este explicabil și ceea ce este inefabil. Cît de bine i se potrivesc lui Barbilian rîndurile scrise cîndva de Emerson (citate în „Numerus", anul 1940, p.173): „Nu ascultăm cu cea mai

mare considerație versurile unui om care este numai poet, nici problemele lui, dacă este numai algebrist; dar dacă un om este în același timp familiarizat cu fundamentele geometrice ale lucrurilor și cu splendoarea lor sărbătorească, poezia lui este exactă și aritmetica lui muzicală". Sîntem obișnuiți să atribuim marii poezii o ambiguitate infinită și, din acest motiv, „poezia exactă” despre care vorbește Emerson poate să pară o iluzie. Dar, în ceea ce privește poezia lui Ion Barbu, nu numai că alcătuirea versurilor sale întruchipează perfecțiunea, nefiind susceptibilă de „ameliorări”, dar însăși încărcătura lor lirică pare să aibă univocitatea unei teoreme matematice. Asupra lipsei de ambiguitate a poeziei lui Ion Barbu au atras atenția, în ultima vreme, unii cercetători. Avem în vedere în primul rînd articolul „Receptivitatea lirică a lectorului modern” de Ștefan Aug. Doinaș, publicat în „Scînteia”, nr.7579 din 11 ianuarie 1968, p.4. În monografia despre Ion Barbu, datorită lui Basarab Nicolescu, intitulată *Cosmologia Jocului secund* și apărută în Editura pentru literatură (1968), poezia lui Ion Barbu este analizată în ipoteza absenței ambiguității, nu numai la nivelul întregii opere, dar chiar la nivel local, în interpretarea fiecărui vers. Această situație pune probleme teoretice deosebit de interesante și de delicate; s-ar putea să avem aici una din manifestările interferenței dintre limbajul științific și cel liric, așa cum sînt ele reprezentate în cercetările recente, prin mijloace structurale (a se vedea și articolul nostru *Questions de poétique algébrique*, în Actes du X-ième Congrès international des linguistes, Bucarest, 1967).

Pe de altă parte, alți cercetători, ca Jean Pierre Benzécri, din Paris (comunicare orală), consideră că deschiderea, chiar în forma sa restrictivă a ambiguității, nu numai că este inevitabilă în limbajul poetic, dar este la fel de inevitabilă și în limbajul științific. Benzécri are în vedere aici faptul că o expresie, fie ea și matematică, naște în mintea fiecărui cititor o asociație specifică de idei, de gânduri, această asociație depinzînd de cultura, de imaginația, de personalitatea cititorului. Poziția lui Benzécri se situează la polul opus față de o altă poziție extremistă, aceea de mult clasică, a lui Charles Bally, care nu vedea decît o singură lectură posibilă a unui text literar, atribuind deci operei poetice un caracter esențial închis.

Exemplul poeziei lui Ion Barbu este deosebit de semnifi-

cativ din punctul de vedere al dialecticii dintre ambiguitate și precizie.

Înainte de a fi discutată în structura ei profundă, poezia lui Ion Barbu pretinde o înțelegere a termenilor cu care ea lucrează, a asociațiilor lor firești care-i leagă de termeni corespunzători din geometrie, algebră sau fizică. Această înțelegere preliminară este aici tot atât de vitală ca și cunoașterea limbii române. La Ion Barbu, unele cuvinte sau expresii ale limbii comune capătă o accepție inedită, influențată de matematică, iar unele expresii din matematică, inexistente în limba literară comună, sînt folosite pentru prima oară în afara matematicii. Dar detectarea și înțelegerea acestor expresii nu se pot face prin simpla consultare a unui manual sau a unui dicționar de termeni matematici; ele reclamă o cultură matematică vastă, care să învedereze întreaga migrație a acestor termeni, transformările de semnificații pe care ei le parcurg. De obicei, un termen de specialitate pătrunde în poezie numai după ce s-a umplut de sevă, prin participarea sa la unele evenimente de seamă ale evoluției științei. Termenul de grup, atât de important în poezia lui Ion Barbu, își dezvăluie întreaga amploare a semnificației sale numai după ce ai cunoscut un număr de formații particulare, dintre cele mai variate, pe care noțiunea de grup le sintetizează, și ai putut urmări măcar o parte din traiectoria dezvoltării ei teoretice. Numai cu această avuție și experiență însușite poți candida la înțelegerea corespunzătoare a unei metafore ca *grupurile apei* sau a poeziei *Grup*, așa cum numai după ce ai văzut un mare număr de case și ai întâlnit cuvîntul *casă* în numeroase contexte, care să-ți dea posibilitatea să distingi un mare număr de sensuri și nuanțe pe care le comportă, poți înțelege folosirea lui ulterioară cu eventuale nuanțe noi, la care capeți accesul prin inducție și intuiție. Este deci nevoie, într-o primă etapă, de o explicare a termenilor și a asociațiilor primare, explicare care prelungește aici cunoașterea limbii în care este scrisă poezia. Dar inteligibilitatea dobîndită printr-o astfel de explicare rămîne foarte limitată, deoarece ea este dobîndită pe o cale artificială, cuvintele fiind desprinse dintr-un număr foarte sărac de contexte.

Această activitate de explicare a unor versuri poate să pară sterilă sau, cel puțin, minoră, deoarece, cum de atîtea ori s-a mai spus, vraja poeziei nu poate fi convertită în

elemente raționale. Explicațiile țin de funcția noțională a limbajului, în timp ce inefabilul poetic este un rezultat al funcției sale de sugestie. Aici ajungem însă la punctul-cheie al situației poetice, la adevărul atât de paradoxal care-l caracterizează: nu se poate sugera decât prin cuvinte precise. Mai mult, exigențele în materie de precizie sînt mai mari în limbajul de sugestie decât în cel noțional, deoarece funcția de sugestie porcede din cea noțională, derivă din ea și nu-și poate dezvolta registrul de mistere și ambiguități decât în măsura în care structura noțională care-i stă la bază este elucidată și precizată.

Încercarea de a sesiza sugestiile unui text poetic fără a-i cunoaște în prealabil baza sa noțională nu poate duce decât la manifestări (mai mult sau mai puțin deghizate) de ignoranță. Echivocurile ignoranței sînt prezentate uneori drept ambiguități și mistere ale poeziei, înlocuindu-se astfel efortul autentic de a se ajunge la bogățiile sugestive ale textului printr-o interpretare arbitrară derivînd exclusiv din „intuiția” cititorului.

În ceea ce privește conceptul de ambiguitate poetică, el trebuie relativizat prin distingerea mai multor niveluri posibile de ambiguitate. Pentru a nu discuta decât un aspect al lucrurilor, vom observa că există o ambiguitate locală, care se manifestă la nivelul versurilor sau chiar al cuvintelor, și o ambiguitate globală, integrală, care se manifesta la nivelul unui întreg poem sau chiar al întregii opere a unui scriitor. Poeți ca Mallarmé sau Blaga prezintă o ambiguitate manifestată la toate nivelurile, în timp ce la un poet ca Ion Barbu ambiguitățile cu caracter local „se rezolvă” uneori la niveluri globale ale operei sale poetice, unde, printr-un proces de neutralizare a unor opoziții, opera își capătă o anumită univocitate. Este adevărat că analizele întreprinse de Basarab Nicolescu asupra poeziei lui Ion Barbu nu lasă loc unei alegeri din partea cititorului, nu permit nici măcar ambiguități cu caracter local, Basarab Nicolescu înclinînd să atribuie fiecărui vers barbian univocitatea unei teoreme matematice. Ne este însă greu să acordăm această univocitate unui vers ca „Suflete-n pătratul zilei se conjugă”, unde chiar omonimia la nivel noțional este o sursă de ambiguitate, deoarece versul poate fi raportat, fie la conjugarea numerelor complexe (pentru care a optat și Basarab Nicolescu), fie la conjugarea diametrelor unei conice, fie, în sfîrșit, la conjugarea la care

se referă *Dicționarul limbii române moderne*. Fiecare dintre cele trei accepțiuni (dacă nu și accepțiunea relativă la flexiunea verbală) participă la metaforizarea termenului în discuție, așa încât de la oricare dintre accepțiuni am porni, rezultatul la nivelul întregii poezii este același. Acest proces de rezolvare a ambiguităților pe măsură ce înaintăm spre nivelurile superioare ale operei prezintă un mare interes teoretic și merită să facă obiectul unor investigații ulterioare. Dar gradul de deschidere către cititor rămâne încă mare, fapt confirmat chiar de către Basarab Nicolescu, atunci când, în virtutea formației sale de fizician, versul „Să nege, dreaptă, linia ce frîngi” îi evocă imaginea razei luminoase rectilinii ce se curbează în apropierea maselor gravitaționale, versul „De ziuă fînul razelor înșală” îi determină observația că „fasciculul de raze luminoase (înțelese sublimat ca direcții de pătrundere în cunoașterea relativă, deci „înșelătoare”) este întâlnit în optică” iar, cu privire la Veghea lui Roderick Usher, invocă intervenția geometriilor neeuclidiene în teoria relativității a lui Einstein. Basarab Nicolescu vine deci cu lectura sa personală a poeziei barbiene, lectură care i se impune cu univocitate. Procesul prin care autorul ajunge la această lectură este atât de bine fixat pe funcția noțională a termenilor utilizați de Ion Barbu, încât univocitatea interpretărilor lui Basarab Nicolescu ni se transmite, într-o anumită măsură, și nouă, celorlalți cititori.

Această logodire a matematicii cu poezia nu este, la Ion Barbu, o simplă chestiune de limbaj și de stil, ci așa cum s-a mai remarcat, una de viziune a lumii. Iată, de pildă, o prezentare a geometriei diferențiale, prezentare în care, ca de obicei la Barbilian, cele mai înalte abstracțiuni își găsesc, prin compensare și printr-o statornică nevoie de echilibru, o reprezentare de o surprinzătoare concretitudine:

„Ca să ții o idee despre obiectul ramurii acesteia de matematică, închipuiți-vă o tablă mare de zinc. Un soare permanent ar îndoi, încălzind-o, fața de zinc, sub forma unei suprafețe mai complicate”.

Geometria diferențială studiază deformările de linii și măsuri într-un rotocol foarte mic din acea suprafață. Lucrurile se prezintă acolo mai simplu. Din studiul acesta *local*, rezultă mai multe consecințe generale pentru suprafața întreagă. Un geometru din Goettingen, Gauss, e iniția-

torul în această știință, căreia Einstein îi împrumută foarte multe rezultate pentru a crea *lumea moluscă*, o lume făcută din relații generale de continuitate, dar cu o înfățișare modificată mereu, de timp („Numerus”, vol.5, 1939, caietul 42, p.29).

S-ar părea deci că viziunea matematică și cea poetică erau bine implantate una într-alta, formau o unitate a personalității sale, o unitate de care nici poetul, nici matematicianul nu trebuia să se simtă jenat sau să se rușineze. Și totuși, cel puțin în aparență, lucrurile nu se întâmplau așa. În anii 1945—1961, orice încercare a unui matematician de a discuta cu Dan Barbilian, în incinta Facultății de matematică, despre activitatea sa poetică, era respinsă cu promptitudine de către interlocutor. Uneori, replica era deosebit de dură și cu efecte de durată. Un matematician l-a întrebat odată „cum mai merge cu traducerea din Shakespeare” (era în perioada în care poetul lucra la versiunea românească a piesei *Richard al III-lea*). Barbilian i-a amintit că este „întîi de toate matematician” și a plecat imediat. De atunci, nu i-a mai răspuns niciodată la salut. Dar de obicei, supărarea lui nu ajungea la forme atît de grave, Barbilian mărginindu-se să răspundă că activitatea poetică reprezintă, pentru el, o fază depășită; uneori, adăuga chiar că regreta această activitate, deoarece cizelarea expresiei poetice este mai puțin interesantă și dătoare de mai puține satisfacții decît cultivarea algebrei axiomatice, formă supremă a curiozității sale intelectuale. Este foarte greu de stabilit adevăratul sens al acestei atitudini a lui Barbilian. Corespundea ea convingerilor sale intime? Erau preocupările sale poetice răzlețe din acei ani simple reziduuri ale unei activități care-l pasionase în tinerețe? Unele mărturii despre discuții pasionate pe teme literare, pe care Dan Barbilian le ducea în acea vreme cu diverși scriitori nu par să confirme această supoziție. Într-o vreme în care revistele literare nu prea îl aminteau, este de înțeles susceptibilitatea sa în raporturile cu matematicienii. Ar fi vrut probabil ca *alții* să-l întrebe de poezie și *despre altceva* să-l întrebe matematicienii. (Asupra tăcerii lui Ion Barbu a se vedea N. Balotă, „Familia”, nr.2, 1968).

Dar susceptibilitatea lui Barbilian nu se manifesta numai în situații de tipul celor menționate mai sus, ci avea un caracter general. Temperament coleric, mereu bănuitor,

mereu stăpînit de suspiciune, Barbilian era un om al atitudinilor categorice, radicale, pendulînd mereu între duioşia pînă la lacrimă şi enervarea însoţită de agitarea în aer a bastonului. Acel baston pe seama căruia se făceau multe glume şi în a cărei manipulare se repercutau nuanţat schimbările sale de atitudine. Cîte comentarii se făceau pe seama acestui baston cu prilejul sesiunilor de examene, cînd Barbilian se mînia din pricina studenţilor leneşi, necinstiţi sau incapabili! Dar se întîmpla uneori ca, prins de chestiunea în discuţie, să se angajeze în propriul său comentariu, dînd un calificativ bun sau chiar foarte bun unui student care nu făcea decît să puncteze spusele examinatorului. Natura personalităţii sale îl pune mereu în dificultate în raporturile umane şi-l găsea mereu deficitar în ceea ce priveşte simţul realităţii.

Cercetarea textelor matematice ale lui Barbilian dezvăluie ipostaze noi chiar pentru activitatea sa literară. Facem aici cunoştinţă cu portretistul, cu satiricul, cu evocatorul. Iată, de pildă, un portret al marelui nostru geometru Gheorghe Ţiţeica, căruia i-a fost student şi, apoi, asistent:

„Un om blond, foarte blond, de blondul idilic al stelei de seară sau al ierbei de munţi, în apus. O faţă românească, dar străveche (daco-romană) încoronată de o calviţie venerabilă, semnul climatului special al ideii”.

„Smerenia şi pacea luminoasă a acestei figuri (ceva din ortodoxia raţională a stareţului Zosim din *Fraţii Karamazov*) la catedră şi la tablă, se însufleţeşte. Gestul, mai larg, arată rîndurile oştirilor de algebre. Un călugăr-soldat ridicînd Cruciata de semne pentru cauza cea mai adevărată, cea mai importantă, «cum sabia n-a pledat vreodată şi nici trîmbiţa n-a proclamat»”.

„Bătălia se desfăşoară albă, hotărîtă, într-un mers de fapt suveran. Ochii profesorului precişi, albaştri, în planul median al amfiteatrului, par materializarea punctelor circulare, de la infinit: organizatori şi absoluţi. Pe cînd faţa se desface pe fondul negru al tablei ca Masca însăşi a geometriei. Ca sfera absolută, neeuclidiană” („Numerus”, vol.5, 1939, caietul 42, pp.28—29).

Şi iată o evocare a unei lecţii de geometrie cu Gheorghe Ţiţeica:

„Am avut curiozitatea să gust, într-o atitudine de aşteptare, lecţiile profesorului Ţiţeica. Le-am cunoscut ca nişte clare bătălii. Sub faţa aceasta, mai ales, le iubesc. Însemnă-

tatea acestor lecții nu-ți îngăduie însă o prea lungă pasivitate. Scoți repede hîrtia, creionul și intri în bătaie. Atunci simți lîngă tine o mînă sigură de neîntrecut combatant. Aici îndepărtează fierul cu care inerția somnolenței voia să te întunece: dincolo arată o potecă sigură în spatele taberei de întuneric; îți încheie armura slăbită de lovituri și, din izbîndă în izbîndă, iată, te conduce în cortul bogățiilor lui Darius: diamantele proprietăților geometrice, tăiate după tetraedru, cub, octaedru, icosaedru" („Numerus", vol.5, 1939, caietul 42, p.29).

Neuitată îmi va rămîne conferința pe care a ținut-o Barbilian în 1955, cu prilejul centenarului morții lui Karl Friedrich Gauss. În amfiteatrul Spiru Haret al Facultății de matematică, un public imens l-a ascultat atunci cu respirația tăiată, evocînd figura celui «*Princeps mathematicorum*», considerat de mulți specialiști cel mai mare matematician al tuturor timpurilor. Barbilian însuși era vădit emoționat; întreaga lui ființă manifesta o transfigurare ceremonioasă. Iată doar cîteva pasaje din această conferință memorabilă, al cărei text a fost publicat ulterior în „Gazeta matematică" (vol.VII, 1955, pp.197—208).

„Un erou, fie al acțiunii sau al meditației, nu ni-l putem reprezenta fără a-i prescrie un cadru. Astfel, pe Alexandru îl evocăm la confinele lumii antice, căzînd sub săgeata partă. Hamlet pe terasa de la Elsenaur, întrebînd apele Sundului. Cum trebuie să ni-l zugrăvim pe Gauss? La masa lui de lucru, doborînd cu o energie fără exemplu dificultățile teoretice sau numerice? Noptile, lipit de luneta în care se încadrează, rînd pe rînd, micile planete: Ceres sau Palas, descoperite de el prin calcul și zărite, mai apoi, de astronomii săi? Tablourile sînt veridice, dar nu vorbesc închipuirii, nu tind către mit”.

„Pe Gauss al anilor intensi se cuvine să-l vedem străbătînd, în mantaua lui de ploaie, pustiul Lüneburgului, găzduit pe la morile de vînt, trăind viața păstorilor din partea locului, dormind vara somnul lor de plumb, prin ierburi, și visînd de curbura pămîntului”.

Iată o apreciere în spiritul viziunii moderne a operei văzute ca un proces: „Da, virtualitățile din opera lui Gauss au o acțiune mai vie decît achizițiile sale indiscutabile. Cu marginile ei mișcătoare, această operă e practic infinită. Ea devine. Ne solicită să emulăm cu dînsa”. Este aici o viziune lirică asupra matematicii, pentru că acele „virtuali-

tăți" și „marginii mișcătoare” la care se referă Barbilian apropie indiscutabil opera matematică de ambiguitatea infinită și metamorfoza nelimitată, care fac farmecul operei poetice. Această idee îndrăzneță, de mare originalitate (să nu uităm că ea a fost enunțată în 1955), va trebui fără îndoială să facă obiectul unor investigații speciale, cu atât mai mult cu cât în ultima vreme și alți autori au ajuns să enunțe idei asemănătoare. Astfel, într-o discuție recentă cu profesorul Jean Pierre Benzécri, de la Universitatea din Paris, acesta mi-a spus: „La langue du mathématicien, comme celle du poète, connaît l'ellipse, la métaphore et elle fourmille d'images, parfois tracées en équations!” (Limba matematicianului, ca și aceea a poetului, cunoaște elipsa, metafora și furnică de imagini, uneori reprezentate prin ecuații!). Dar nu este oare limbajul figurat o sursă inepuizabilă de ambiguitate? Poate că, pe măsură ce cercetările asupra limbajului științific și limbajului poetic vor progresa, va trebui să renunțăm la ideile atât de înrădăcinate pe care le avem despre ele. Reflecțiile lui Dan Barbilian invită, printre primele în ordine cronologică, la o astfel de revizuire.

Iată, în sfârșit, evocarea unei călătorii la Goettingen:

„În trecerea mea ultimă prin Goettingen am fost condus să văd odaia în care a murit Gauss. Pregetasem s-o fac mai înainte. E păstrată, aproximativ, în starea în care se afla în acea dimineață de 23 februarie, acum 100 de ani. În lumina galbenă, aproape mistică, ce cădea din fereastră, simplitatea lucrurilor din jur căpăta nu știu ce omogeneitate, ce unitate severă. Orice podoabă ar fi fost de neîndurat, o incongruitate și o pată de stil. Iată jilțul în care a așipit de veci; aci, gherocul lung, descris de Dedekind, în care apărea studenților; mai departe, pupitrul alb, de mesteacăn, pe care supunea adevărul.”

„Impresia e copleșitoare.”

„Această cameră ce a conținut, în putere, matematica unui veac întreg, mi-a apărut însăși materializarea artei neegale a teoremei („maximum de gând în minimum de cuprindere”) practică de Gauss.”

.

„Gauss a realizat printre matematicieni un ordin nou, oarecum transfinit de mărime. E net superior unei opere, ea însăși supremă”.

Un amănunt anecdotic colorează episodul publicării articolului despre Gauss. Un redactor al „Gazetei matematice”, după ce citise textul conferinței, avu inspirația nefericită de a-i face autorului unele observații stilistice. Fraza incriminată suna astfel:

„Marea aventură a vieții sale a fost măsurarea diferenței de latitudine între Goettingen și Altona”.

Pe redactor îl supăra cuvântul „aventură” (care, de altfel revenea și în altă frază: „Adevăratele aventuri ale acestei vieți, în definitiv cenușii, sînt descoperirile matematice care o înseamnă”).

Dar replica lui Barbilian veni categorică: — Pe semne că dumneata nu știi că există și altfel de aventuri decît cele amoroase! Redactorul părăsi repede locul discuției iar articolul apăru fără nici o modificare.

Puțin cunoscută este verva satirică a lui Barbilian. Ea era necruțătoare la examene, ca și la seminarii, în special la adresa studenților. Într-una din lecțiile sale asupra aplicațiilor teoriei lui Galois la demonstrarea imposibilității cvadraturii cercului și trisecțiunii unghiului cu ajutorul riglei și compasului, Barbilian n-a scăpat prilejul de a-și exercita vigoarea polemică la adresa celor care se înverșunează să ignoreze imposibilitatea despre care am vorbit mai sus:

„Astfel, o întreagă categorie de diletanți aparținînd mai tuturor națiunilor și recrutați din cele mai variate cercuri: funcționari de bancă, avocați de provincie, învățători, doctori fără clientelă, profesori de liceu neinformați, se cheltuiesc zadarnic în a căuta să rezolve probleme pentru care nu au nici o pregătire, și anume în sensul pozitiv al întrebării, dovedit matematiceste de mult ca imposibil. Toți visează să trisecteze unghiul, să cuadreze cercul sau să dubleze altarul lui Apollon din Delos”.

„Academiile sînt inundate periodic de «soluțiile lapidare», reduse la cîteva rînduri de mizerabile silogisme, ale unor maniaci”.

„Această tenace ginte formează un fel de internațională, în felul filateliștilor, întrețin o bogată corespondență în care se plîng de neînțelegerea științei oficiale și se mîngîie cu justiția posterității. Cunoștințele lor în matematică nu trec, în cele mai bune cazuri, de nivelul școalei secundare. Ceea ce îi unește mai ales, este oroarea de a se informa și un anume arsenal de argumente iluministe”.

„La Congresul matematic din Oslo, din 1936, am putut vedea de aproape un trisector al unghiului. Era îmbrăcat aproape preotește cu un fel de sutană, și purta bocanci ghintuiți, de alpinist. Un păr incult îi cădea pe umeri. Trecea hieratic și îndepărtat printre congresiști, cu toate semnele unui exil consimțit”.

„Am întrebat pe un coleg norvegian, cine e acel straniu personaj. «Îl cheamă Larssen. A împărțit unghiul în trei, cu compasul, și speră, dacă inspirația îl va susține, că îl va putea împărți și în patru».” (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Ed. Facultății de științe, București, 1945—1946, pp.398—399).

Scriind despre alte personalități, Dan Barbilian s-a zugrăvit de multe ori pe sine. Reflecțiile sale asupra conciziei și ermetismului lui Gauss sînt tot atîtea explicații ale așa-numitului ermetism al poeziei barbiene. Teorema, formă supremă a gândirii matematice, este văzută de către Gauss, prin pana lui Barbilian, „ca un text august, ca o inscripție al cărei laconism e însăși garanția durabilității ei” („Gazeta matematică”, vol.7, 1955, nr.5, p.202). Despre Pfaff, profesorul lui Gauss, Barbilian observă că a intervenit, în timp ce Gauss își redacta teza, „pentru a determina pe Gauss să renunțe la acel ermetism al său, ce se făcea de pe atunci simțit. Gauss n-a cedat sfaturilor lui Pfaff, sub cuvînt că extrema lui concizie nu e datorită pregetului de a dezvolta argumentele, ci unor operații dificile, de eliminare a tot ceea ce este accesoriu”. Barbilian caracterizează astfel pe Gauss: „maximum de gînd în minimum de cuprindere”.

Oare nu sînt valabile toate aceste aprecieri și pentru Barbilian și, mai mult, chiar pentru Ion Barbu? Nu este o poezie oarecare din ciclul *Joc secund* „ca un text august, ca o inscripție al cărei laconism este însăși garanția durabilității ei”? Nu simțim, dindărătul lui Pfaff, puzderia de critici care n-au înțeles sensul profund al poeziei lui Ion Barbu, acuzîndu-l pe nedrept de obscuritate sau de joc gratuit de cuvinte?

Nu este vorba aici numai de simplul deziderat al conciziei, ci de ceva mult mai adînc. Barbilian a intuit funcția euristică a limbajului, funcție care se manifestă cu atît mai eficient cu cît limbajul este mai sugestiv și mai economic. Nu vorbea Barbilian despre „rigoarea stilistică și logică” a scrierilor lui Gauss, rigoare care „are într-însă ceva nemi-

los, inexorabil. Nu mai puțin fascinator" („Numerus", vol.7, 1955, nr.5, p.202)? Parafrazându-l pe Poincaré, care, referindu-se la matematică, observa că o notație bună echivalează cu o descoperire, putem spune că o expresie lirică destul de densă permite detectarea unor noi și necunoscute zone ale sensibilității omenești. Întocmai ca și Gauss, care „n-a publicat decât o fracțiune din ceea ce a gândit de-a lungul unei vieți întregi", deoarece... „sigiliul său personal închipuia un pom cu puține roade", iar dedesubt cuvintele *Pauca sed matura*, Ion Barbu, după cum se știe, a scris puține poezii, este poate cel mai puțin productiv dintre marii noștri poeți, tocmai pentru că-și impunea acea rigoare nemiloasă pe care o întrezărea în scrierile lui Gauss.

*

L-am întâlnit, pentru ultima oară, pe Dan Barbilian, în iarna anului 1960—1961, în incinta bibliotecii Facultății de matematică-mecanică. Nu-l mai văzusem de mult, se afla după o lungă absență de la universitate, datorită bolii. Nu era restabilit, se afla doar într-un moment de ușoară ameliorare a stării sale; dealtfel, în scurt timp boala sa s-a agravat și nu și-a mai revenit niciodată. Mi-a spus: „Am aflat de la Sandu Rosetti (*n.n.*: este vorba de acad. Alexandru Rosetti) că te ocupi de traducerea automată, și vrei oare să-l traduceți și pe Homer"? Nu, i-am răspuns, liniștindu-i, este vorba deocamdată numai de texte științifice. „Ei, tot e bine că v-ați oprit aici!" mi-a replicat, strângându-mi mîna pentru ultima oară.

Dar tot Dan Barbilian este acela care, încă în 1943, releva pentru prima oară faptul că la Hilbert „se ridica nouă, covârșitoare prin originalitatea ei, o idee insolită, cum ar fi, de pildă, afirmarea structurii de inel a limbajului în raport cu operațiile sintaxei, de unde încheierea asupra anteriorității acestuia față de logică și aritmetică" (vezi articolul despre David Hilbert publicat în „Numerus" în 1943, cu prilejul morții marelui matematician german).

Scriind aceste rânduri, bănuia oare Barbilian că anticipa, împreună cu Hilbert, un domeniu nou de aplicare a matematicii, acela al lingvisticii algebrice? Într-adevăr, unul dintre creatorii lingvisticii algebrice, Noam Chomsky, s-a inspirat, în elaborarea conceptului său de gramatică generativă, din teoria sistemelor formale, așa cum a fost

ea inițiată de către Hilbert. Arhitectura unui sistem formal se regăsește, în liniile sale esențiale, în arhitectura unei gramatici generative. Să mai observăm faptul că structura de inel a limbajului în raport cu operațiile sintaxei a fost exploatată în mod sistematic de către un algebrist ca Joachim Lambek, în elaborarea unui calcul al tipurilor sintactice, punct de plecare în construirea diferitelor tipuri de gramatici categoriale (a se vedea, pentru toate aceste fapte, S. Marcus, E. Nicolau, S. Stati, *Introducere în lingvistica matematică*, Ed. Științifică, București, 1966, cap. III, și mai cu seamă, S. Marcus, *Algebraic Linguistics*, Academic Press, 1967, cap. III).

*

Exegeza operei poetice a lui Ion Barbu a căpătat în anii din urmă o mare amploare. Nu același lucru se poate spune despre exegeza textelor matematice ale lui Dan Barbilian, în ciuda faptului că o mare parte din aceste texte sînt deja strînse în volum. Nu este vorba doar de o înțelegere paralelă a poetului și a matematicianului, ci și de o înțelegere încrucișată, care are ambiția să identifice pe poet în textele de matematică și pe matematician în textele poetice. Dacă despre acesta din urmă s-a mai scris cîte ceva, despre prezența poetului Ion Barbu în țesătura textelor matematice ale lui Dan Barbilian trebuie să recunoaștem că știm încă foarte puțin.

Există, la unii exegeți ai acestei uriașe personalități, tendința, ce-i drept nemărturisită, de a acredita impresia că Ion Barbu și Dan Barbilian au existat doar întîmplător în una și aceeași persoană, influența unuia asupra celuilalt fiind cu totul superficială. Sîntem însă convinși că, prin dezvoltarea unei formații cît mai interdisciplinare a noilor generații de intelectuali, cultura românească va primi fără prea mare întîrziere darul pe care de mult îl merită: o lectură unitară a operei marelui nostru matematician și poet.

Nepot al ultimului domnitor al Moldovei (Grigore Ghica), Matila Ghyka este marcat încă din tinerețe de o formație interdisciplinară, fiind în același timp inginer și licențiat în litere și în drept. Lunga sa activitate în diplomatie i-a dat răgazul necesar pentru a acumula o vastă cultură și pentru a edifica o operă de pionierat în domeniul esteticii, prin urmărirea sistematică a modului în care operele de artă se supun, ca și natura, unor regularități susceptibile de o descriere matematică, sugerînd unele corespondențe profunde între gîndirea științifică și cea artistică, ca și cum una s-ar proiecta în cealaltă.

Înseși titlurile operelor lui Matila Ghyka, dintre care amintim aici doar o parte, sînt semnificative: *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (Collection „La pensée contemporaine”, N.R.F., Paris, 1926), *Le nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale*, tome I; *Les Rythmes*, tome II: *Les Rites* (N.R.F., Editions de la Nouvelle Revue Française, Librairie Gallimard, Paris, 1931). Prin aceste opere, Matila Ghyka și-a devansat epoca, deoarece abia dezvoltarea teoriei informației și a domeniilor interdisciplinare, caracteristică ultimelor două decenii, avea să ofere cadrul adecvat pentru înțelegerea diferitelor restricții care guvernează aspectele combinatorii în structura operelor de artă. Profesor de estetică în Statele Unite ale Americii, în timpul celui de-al doilea război mondial, iar ulterior profesor de estetică la Universitatea din Londra, perioadă în care elaborează și publică *Philosophie et mystique du nombre*, Matila Ghyka moare în 1965, la Londra, dar acest eveniment trece neobservat la noi, cum aproape neobservată, în mediile intelectuale românești, trecuse întreaga sa operă. (Să semnalăm totuși că Petru Comarnescu a reacționat prompt și favorabil la apariția cărții lui Ghyka din 1926, printr-un articol publicat în 1927 în „Viața românească”).

Cu prilejul morții sale, ziarul francez „Le Monde” consacră o relatare destul de amplă, care pentru noi a constituit șansa de a afla despre existența lui Matila Ghyka. În anii imediat următori, am căutat să ne apropiem de opera sa, dar nu am identificat în bibliotecile noastre decît o parte a ei. Prin diferite expuneri făcute în acei ani, am căutat să atragem atenția asupra acestei personalități importante a culturii noastre, a cărei operă nu a fost tradusă în românește, nici măcar prin unele selecții mai reprezentative. În toamna lui 1971, cu prilejul unei conferințe ținute la „Columbia University” din New York, avînd ca temă tocmai structurile matematice în artă, am avut prilejul să fac cunoștință cu Roderich Ghyka, fiul lui Matila Ghyka, de la care am aflat cîteva lucruri importante despre viața și opera tatălui său. Ascensiunea fascismului în România l-a surprins pe Matila Ghyka la Londra, unde era ambasadorul țării noastre. Și-a dat imediat demisia din această funcție, în semn de protest contra fascizării țării (oricum ar fi fost demis de către legionari și, ulterior, de către Antonescu, fiind cunoscut pentru atitudinea sa antifascistă), hotărînd să nu se mai întoarcă în țară. Opera lui Matila Ghyka este mult mai vastă decît ceea ce am semnalat mai sus ; Roderich Ghyka ne-a promis că, împreună cu sora sa, Maureen Ghyka (care locuiește la Paris), va pune la dispoziție toate informațiile de care dispune, atunci cînd vom dori să-l reedităm.

Alături de Servien, Matila Ghyka este un pionier al teoriei matematice a ritmului. Ghyka distinge ritmurile ireversibile, care se dezvoltă în durată (muzică, poezie) și sînt emanații directe ale experienței trăite, de ritmurile spațiului (arhitectură și plastică), domeniu al reversibilului și al continuului, al proporției propriu-zise, în special pentru ciclul creator pe care Ghyka îl numește „mediteranean”, unde se manifestă într-un mod caracteristic sensul proporției și al unui ritm spațial bazat pe înlănțuiri și combinații de proporții, controlate toate de anumite regularități matematice. Ritmurile ireversibile sînt studiate cu ajutorul unor notații în cadrul cărora, pe baza unor șiruri simple de numere, sînt reprezentate ritmurile care reflectă undulații afective paralele cu cele două cadențe fiziologice cu trame numărabile : trama fundamentală a bătăilor inimii și unda respiratorie, reflectare și mai directă a fluxului afectiv. Această explicitare a unor structuri ritmice dintre cele mai variate, cu ajutorul unor procedee matematice

uniforme, aşază într-o aceeaşi serie operele ciclului mediteranean (Egiptul, Grecia, Bizanţul, epoca gotică, Renaşterea), prin consecvenţa cu care ele se supun unei geometrii impuse de morfologia formelor vii şi de legile creşterii biologice.

Cea mai importantă regularitate pe care o studiază Matila Ghyka este aceea definită de „proporţia de aur” (egală cu $(1 + \sqrt{5})/2$) şi obţinută, între altele, ca limita, pentru $n \rightarrow \infty$, a raportului dintre termenul de rang n şi cel de rang $n - 1$ din şirul lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., unde fiecare termen de rang > 2 este suma celor doi termeni imediat precedenţi. Dacă notăm cu F_n termenul de rang n din şirul lui Fibonacci, se constată că

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

unde, după cum se observă, în membrul al doilea apare puterea a n -a a proporţiei de aur. Este interesant să constatăm aici insistenţa cu care apare numărul $\sqrt{5}$, acelaşi care constituie cea mai bună valoare posibilă în teorema lui A. Hurwitz („Mathematische Annalen”, 1891), conform căreia, pentru orice număr iraţional x , inegalitatea

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

este satisfăcută pentru o infinitate de perechi de numere întregi p şi q ($q > 0$). Împărţind un segment de dreaptă în două părţi neegale, în aşa fel încît raportul dintre întregul segment şi partea mai mare să fie egal cu raportul dintre partea mai mare şi partea mai mică, se constată că raportul în cauză este rădăcina pozitivă a ecuaţiei $1 + x = x^2$, adică tocmai numărul de aur. Cunoscut încă din antichitate, acest număr exprimă unele proporţii fundamentale ale corpului uman. Matila Ghyka arată că, în opoziţie cu simetria de tip hexagonal, expresie a unui echilibru inert şi simplist, care stă la baza lumii minerale, lumea vegetală şi animală este legată de simetria pentagonală definită de numărul de aur, simetrie care dă naştere unei periodicităţi dinamice şi structurează pulsaţiile crescînde ale unei spirale logaritmice. Jocul subtil al proporţiilor şi asimetriilor corpului omenesc, exprimat cu fidelitate prin numărul de

aur, era la greci un model pentru formele arhitecturale. Când vorbește despre coloane, Vitruviu compară proporțiile coloanei dorice cu cele ale corpului masculin, în timp ce proporțiile coloanei ionice îi evocă corpul grațios al femeii. Dar nu numai formele arhitecturale, ci și cele ale picturii și ale muzicii sînt, de multe ori, guvernate de proporția de aur. Teoria pitagoreică a armoniei muzicale este fondată pe studiul proporțiilor. În tratatul *De Divina Proportione* al lui Fra Luca Pacioli di Borgo, din secolul al XV-lea, consacrat numărului de aur, numit de astă dată „proporția divină”, numeroase ilustrații, datorite lui Leonardo da Vinci, conțin proporții date de același număr. Deosebit de interesantă este prezența numărului de aur în lumea vegetală, prezență detectată prima oară de Kepler. Ulterior, Wiener a aprofundat rolul numărului de aur în domeniul filotaxiei, studiind dispoziția ramurilor, a frunzelor și a semințelor. Wiener a observat că unghiul care apare în expresia ecartului unghiular constant al ramurilor conține pătratul numărului de aur. Acest unghi se obține ca soluție a problemei expunerii optime a frunzelor la lumina verticală. Iată deci că fenomene dintre cele mai variate sînt, cum se exprimă Paul Valéry în a sa *Cantique des colonnes*, fiice ale numărului de aur. Expresie a analogiei profunde dintre fenomene și a unității lumii materiale, numărul de aur rămîne în centrul atenției cercetătorilor. În urmă cu peste douăzeci de ani, Paul Montel prezentase, în „Revue d'esthétique”, o sinteză a proprietăților numărului de aur, proprietăți de natură să convingă orice matematician de situația sa singulară cu totul remarcabilă. Posibilitatea de a reprezenta numărul de aur prin fracția continuă infinită.

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

fracție care nu folosește decît cifra 1, conferă acestui număr o importanță deosebită în teoria numerelor. Este de asemenea interesant faptul că progresia geometrică infinită avînd ca prim termen pe 1 și ca rație numărul de aur este și ea un șir al lui Fibonacci, cu alte cuvinte, notînd cu φ numărul de aur, avem $\varphi^{n-1} + \varphi^n = \varphi^{n+1}$ pentru orice

$n > 1$, în timp ce, așa cum am observat, $1 + \varphi = \varphi^2$. Această progresie geometrică este considerată de Ghyka (p.129 din *Le nombre d'or*, tome 2) drept modelul, paradigma ideală a creșterii organice, în raport cu care șirul inițial al lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... este doar o aproximare practică (deoarece termenii ei sînt numere întregi) realizată în natură. Dealtfel, trebuie menționat că șirul lui Fibonacci a fost descoperit în 1202 de către Leonardo din Pisa, tot în studiul unei probleme de creștere biologică: modul de înmulțire a iepurilor. Deci numărul de aur, cunoscut încă din antichitate, i-a precedat cu multe sute de ani.

Numărul de aur pare să exprime un deziderat organic al naturii și al omului, unul dintre acele elemente pe care probabil omul le are în comun cu orice ființă cugetătoare din univers. Acele mesaje laconice pe care pămîntenii le lansează către niște posibili locuitori ai altor planete sau corpuri cerești ar trebui poate să conțină, alături de π și de numerele prime, și numărul de aur.

Rezultate disparate privind prezența — deliberată sau nu — a proporției de aur în marile opere ale naturii și ale artei există deci de multe secole. Matila Ghyka este primul care realizează o sinteză de o înaltă capacitate explicativă a acestor fenomene. De exemplu, analizînd traseele de regulare (*les «tracés régulateurs»*) deosebit de riguroase ale planurilor templelor egiptene și grecești și ale bisericilor gotice, el arată că toate se înserează ca variante ale aceleiași „teme”, aceea a numărului de aur, temă a pulsației vieții, pe care dealtfel Renașterea o regăsește sub egida spirituală a lui Platon, considerat de Ghyka un gînditor prin excelență mediteranean. Pentagrama, semnul geometric al numărului de aur, emblemă a armoniei și a sănătății la pitagoricieni, s-a transmis, ca atare sau prin unele variante, de-a lungul epocilor ulterioare. Ghyka urmărește cu atenție traseele acestei evoluții. Desigur, propune uneori interpretări pe care astăzi nu le mai putem accepta, dar rămîne deosebit de actual prin consecvența cu care pune în evidență capacitatea explicativă a structurilor numerice în opera de artă. În perspectiva actuală, trebuie să observăm că ceea ce lui Ghyka i-a apărut ca o aritmetică bizară, care aducea pe primul plan anumite numere în dauna altora, este de fapt expresia unor procese recurente cu o infinitate de etape (a se vedea legătura profundă a

numărului de aur cu șirul lui Fibonacci și cu procesele de aproximare a numerelor reale), procese care sînt modul de activitate al unor adevărate mașini generative care definesc creativitatea naturii sau a omului. În același timp, regularitățile aritmetice pe care Ghyka le dezvăluie a fi atît de sistematice în natură ca și în artă sînt doar unul din modurile de manifestare a tendințelor antientropice, de creștere a energiei informaționale (în sensul lui Onicescu). Natura și arta se supun unor restricții de o mare severitate, dar aceste restricții nu sînt vizibile cu ochiul liber. Numai învățînd să le cunoaștem putem supune, la rîndul nostru, materia, limbajul pe care-l folosim, fie că este vorba de limbajul articulat al vorbirii obișnuite, fie că avem în vedere limbajele pe care omul le construiește în mod deliberat, în știință sau în artă. Aceasta este lecția gîndirii lui Ghyka, pe care întreaga dezvoltare ulterioară a gîndirii științifice și a celei artistice o confirmă. Tocmai aici se află motivarea posibilităților pe care le avem astăzi de a simula la calculator regularitățile operelor de artă și chiar procesele de creație artistică, în măsura în care ele revin la procese recurente pe care le putem explicita și descrie algoritmic. Putem spune fără exagerare că dacă astăzi știm ce trebuie să înțelegem, nu doar la modul metaforic, prin gramatica unei opere de arhitectură, a unui menuet, a unei structuri narrative, aceasta se datorează în bună măsură și clarificărilor aduse de opera lui Matila Ghyka. Este interesant că și acum, ca și pe vremea lui Ghyka, unii savanți încearcă să găsească o rațiune și o interpretare de ordin psihologic a regularităților care străbat opera de artă. Dacă Ghyka se referea la principiul adaptării optime la mediu, ca factor care ar reglementa un anumit simbolism al formelor și proporțiilor (în concordanță, de altfel, și cu unii autori de mai tîrziu, ca R. Arnheim), astăzi mecanismele generative ale operelor de artă sînt raportate la anumite ipoteze privind competența și creativitatea artistică și modul de lucru al creierului uman. Modernitatea lui Ghyka se manifestă și aici printr-o poziție apropiată de cea contemporană; chiar dacă nu a intuit viziunea generativă actuală, Ghyka a adoptat un punct de vedere funcțional, care surprinde dinamica operei de artă ca un proces de creștere. Structurile cristaline, spiralele semințelor de floarea-soarelui și ale unor cochilii, precum și alte procese de creștere biologică îi sugerează lui Ghyka regulile

creșterii armonioase. Este foarte curios că nu am găsit în opera lui Ghyka, cel puțin în partea care ne-a fost accesibilă, nici o referire la un autor cu care este totuși atât de înrudit: D'Arcy Thompson, autorul clasicei lucrări *On growth and form* apărută în 1917, a cărei considerabilă actualitate a determinat republicarea ei (într-o versiune prescurtată) în 1961, de către Cambridge University Press, Oxford. Acum însă, noile sinteze vin să repare aceste omisiuni. Avem în vedere în primul rând cartea lui René Huyghe *Formes et forces. De l'atome à Rembrandt* (Flammarion, Paris, 1971), care restituie istoriei culturii apropierea acestor două spirite atât de vecine: D'Arcy Thompson și Matila Ghyka. Insistăm cu deosebire asupra capitolului VII al cărții lui Huyghe, capitol dedicat formelor creșterii, în cadrul căruia o întreagă secțiune este dedicată numărului de aur, insistându-se asupra creșterilor în spirală, în natura biologică și în artă. Huyghe ajunge la concluzia că secțiunea de aur este soluția la care viața în mod inevitabil trebuia să ajungă „pour répondre à sa double exigence de faire persévérer dans sa personnalité l'être qu'elle anime et de lui ouvrir pourtant la possibilité de se transformer en s'accroissant” (loc. cit., p.289). Tendinței de mistificare pe care Ghyka a încercat s-o imprime interpretărilor date simbolismului formelor și proporțiilor (Kabbala, societăți secrete etc.), tendință care nu este lipsită de unele capcane, pe care le cultivă cu predilecție, și în zilele noastre, unele societăți și publicații (a se vedea, de exemplu, revista americană „Scripta Mathematica”), Huyghe îi opune o demistificare: „La section d'or ne fait que répondre *intellectuellement* à une nécessité que la vie ne pouvait manquer de satisfaire *en fait*. Il est donc essentiel de démystifier une proportion que la pente au rêve et à l'insolite de l'imagination humaine a voulu doter d'un pouvoir occulte qui n'a que trop donné prétexte à des délires plus ou moins ésotériques” (loc. cit., p.289). Huyghe consideră că interpretările cvasimistice ale secțiunii de aur au făcut adevărate ravagii în istoria artei. Trebuie să recunoaștem că, în special prin unele din ultimele sale scrieri, Ghyka nu este străin de acest fenomen, dar contribuțiile valabile din opera sa nu pot fi umbrite de aceste manifestări totuși minore. Într-un paragraf de un considerabil interes teoretic (*Du dédoublement de la cellule à l'esthétique*, loc. cit., pp.289—296), Huyghe arată în ce sens secțiunea de aur și toate fenomenele

similare trebuie să fie utilizate în arta contemporană. Huyghe observă că omul transformă în inițiativă ceea ce, în natură, nu este decît consecința inevitabilă a datelor problemei. Încercăm să regăsim, prin mijloace elaborate, ceea ce viața este obligată să obțină pe o cale naturală. De exemplu, în arhitectură totul se petrece ca și cum arhitectura „artificială” ar tinde să regăsească, prin constrîngerile pe care i le impune omul, unitatea pe care arhitectura naturii o dobîndește din mecanismele cele mai esențiale ale vieții, în primul rînd din procesele de creștere. Un arhitect ca André Hermant (autor al studiului *Croissance et Topologie*) identifică în realitate ceea ce el numește «*des tracés résultants*» trasee pe care le regăsește prin calcul orice arhitect, în arhitectura sa „artificială”, sub forma acelor «*tracés régulateurs*» la care se referea și Ghyka. În acest spirit, mari artiști ai secolului nostru ca sculptorul Étienne Beotthy în *Dans l'rus* și pictorul Piet Mondrian în *Broadway boogie-woogie* (a se vedea și studiul corespunzător al lui Ch. Bouleau, în „*Charpentiers*”, Editions du Seuil, 1961) au reactualizat numărul de aur (a se vedea și Huyghe, loc. cit., p.291). În studiul său *L'Architecture des plantes* (în „*Techniques et Architecture*”, Paris, 1947), André Hermant stabilește o corelație între diferite moduri de creștere: ramificarea, seriile, dispozitivele în spirală etc., interpretîndu-le ca etape logice ale unui proces al cărui punct de plecare îl constituie faptul elementar al dedublării celulei (fenomen numit *mitoză*). În continuare, Hermant arată că acest proces al dedublării este punctul de plecare al unui fenomen de creștere care poate fi descris riguros cu ajutorul unor transformări topologice capabile să explice, de o manieră uniformă, un mare număr de procese de creștere din lumea vegetală și animală, procese care au ca numitor comun, așa cum arăta Ghyka (pe care Huyghe îl menționează), numărul de aur, capabil să exprime unitatea în diversitate. (Se are aici în vedere faptul că o creștere aditivă descrisă printr-un șir al lui Fibonacci generează o creștere în progresie geometrică — avînd ca rație numărul de aur — progresie care este de asemenea un șir al lui Fibonacci).

Dar încă înainte de aceste considerații, Huyghe, după ce amintește contribuția esențială a biologului D'Arcy Wentworth Thompson, din 1917 (de observat că versiunea prescurtată, din 1961, a cărții sale, versiune datorită lui John

Tyler Donner, prezintă, față de versiunea originală, avantajul de a fi pusă la punct cu progresele științifice la zi; acest proces de aducere la zi este continuat și în ediția din 1966 a aceleiași cărți), contribuție care a fixat baza științifică a tuturor proceselor de creștere a formelor, atât în lumea minerală, cât și în cea vegetală și animală, trece imediat la contribuția (pe care o califică „de mare răsunet”) lui Matila C. Ghyka din 1926, asupra căruia enunță o judecată critică pe care sîntem datorii s-o examinăm aici: „L’auteur a été entraîné dans un plaidoyer quelque peu forcé en faveur de la section d’or, dont on sait qu’elle a beaucoup agité et continue d’agiter les esprits. Sans doute même a-t-il contribué à lui donner l’importance excessive qu’elle a prise pour certains, que travaillait, comme il n’arrive que trop de nos jours, le désir de concilier le goût du merveilleux et l’apparat savant. Du moins a-t-il eu le mérite de ramasser de façon frappante les lois scientifiques qui expliquent le mieux la différence séparant les formes organiques des formes inorganiques, — l’équilibre cristallin, naturel à la matière, de la poussée, propre à la croissance de la vie”. (Huyghe, op. cit., p.264). La ce oare s-ar putea referi caracterul oarecum forțat al pledoariei lui Ghyka pentru numărul de aur? În nici un caz la universalitatea acestui număr, deoarece Huyghe însuși o recunoaște, argumentînd-o cu mijloace noi, topologice, care nu-i erau accesibile lui Ghyka (am reprodus mai sus esența argumentării lui Huyghe; pentru detalii, a se vedea întregul capitol VII din cartea lui Huyghe și, în special pp.289—296). Caracterul forțat al pledoariei lui Ghyka nu se poate referi decît la simbolismul atribuit uneori de către acesta secțiunii de aur și altor proporții pitagoreice, simbolism legat de o geometrie esoterică, de magie, societăți secrete și masonice, alchimie, kabbală, francmasonerie, interpretări mistice (în special în volumul al doilea din *Le nombre d’or* și în *Philosophie et mystique du nombre*); am văzut dealtfel, mai sus, că Huyghe demistifică numărul de aur, fără ca prin aceasta să-i reducă importanța. Acest proces binevenit de demistificare a unor regularități ale naturii și ale artei nu poate totuși ascunde faptul că mistica numerelor își are o întreagă istorie, care nu este lipsită uneori de semnificații sociale, estetice. Urmărind această istorie — este adevărat, nu cu detașarea de care sîntem capabili astăzi — Ghyka sintetizează o evoluție milenară, care trebuie cunoscută. În ace-

lași timp, recunoașterea, în 1971, de către o personalitate ca aceea a lui Huyghe, a clarificărilor pe care Ghyka le-a adus în ceea ce privește structura proceselor de creștere în lumea organică (în opoziție cu cele din lumea anorganică) îl situează pe Ghyka drept unul dintre cei mai importanți continuatori ai lui D'Arcy Thompson, care, la rîndul său, este autorul primei viziuni moderne a proceselor de creștere a formelor. Tot Huyghe este cel care atrage atenția asupra convergenței punctelor de vedere ale lui Ghyka și D'Arcy Thompson în ceea ce privește problema entropiei (Huyghe, op.cit., pp.387—388).

Am dori să mai menționăm încă cel puțin patru cărți monumentale, care pot prilejui o reevaluare a contribuțiilor lui Ghyka în contextul D'Arcy Thompson-Ghyka-Huyghe: cartea lui Hermann Weyl (*Symmetry*, Princeton University Press, 1952; versiune românească, Ed. Științifică, București, 1966), cartea lui François Jacob (*La logique du vivant. Une histoire de l'hérédité*, Editions Gallimard, 1970; versiune românească, Editura enciclopedică română, București, 1972), cartea lui Jacques Monod (*Le hasard et la nécessité. Essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne*, Editions du Seuil, Paris, 1970) și cartea lui René Thom (*Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles*, W. A. Benjamin, Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1972; Second Printing with corrections, February 1973). La acestea trebuie, evident, să adăugăm anumite lucrări de estetică și teoria artei, cum ar fi cele ale lui Rudolf Arnheim (*Art and visual perception*, London, 1956; *Gestalt psychology and artistic form*, „Aspects of form”, Bloomington, 1961), cele de estetică informațională ale lui Abraham Moles (*Théorie de l'information et perception esthétique*, Flammarion, Paris, 1958; *Art et ordinateur*, Casterman, Paris, 1971, versiune românească, Ed. Meridiane, 1974), ale lui Max Bense (dintre care menționăm aici *Aesthetica-Einführung in die neue Ästhetik*, Baden-Baden, 1965) și a lui Siegfried Maser (*Numerische Ästhetik*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart/Bern, 1970, 2. Auflage, 1971) pe linia contribuțiilor mai vechi ale unui contemporan al lui Matila Ghyka, G. D. Birkhoff, pe care în mod surprinzător se pare că Ghyka îl ignoră (cel puțin în acea parte a operei sale care ne-a fost accesibilă), în ciuda unei apropieri evidente de viziune, precum și lucrările privind legăturile artei cu ciber-

netica, de tipul celei editate de către Jasia Reichardt, *Cybernetics, Art and Ideas* (New York Graphic Society Ltd., Greenwich, Connecticut, 1971). Nu am avut posibilitatea să controlăm vasta operă de estetică matematică a lui G. D. Birkhoff, pentru a vedea în ce măsură s-a sesizat acesta de contribuțiile lui Ghyka. Vom mai menționa, în cadrul esteticii informaționale, contribuțiile cuprinse în volumul *Estetică, informare, programare*, antologie, prefață și note de Victor Ernest Mașek, Ed. Științifică, București, 1972, și cele din cartea lui V. E. Mașek (*Artă și matematică. Introducere în estetica informațională*, Ed. Politică, București, 1972). În această din urmă lucrare sînt discutate doar în mod sumar unele idei ale lui Ghyka și Servien, dar întreaga carte oferă o interesantă perspectivă filozofică de estetică informațională, cu o discuție destul de amănunțită și pertinentă a rolului calculatoarelor electronice în această ordine de idei, în raport cu care atît opera lui Servien, cît și aceea a lui Ghyka își dezvăluie valențe noi. În sfîrșit, am mai adăuga ciclul lucrărilor de semiotică inaugurate prin opera clasică a lui C. S. Peirce.

Toate aceste publicații ulterioare operei lui Ghyka sînt tot atîtea oglinzi care dau imagini — replici dintre cele mai variate ale ideilor teoreticianului numărului de aur. Aceste replici urmează însă să fie explicitate, deoarece majoritatea lucrărilor menționate nu conțin referințe explicite la opera lui Matila Ghyka. Acest efort de explicitare, important nu doar din punctul de vedere al unei evaluări contemporane a operei lui Ghyka, ci și din punctul de vedere al evoluției generale a ideilor în domeniul evoluției formelor naturale și artistice, nu poate veni din partea unui singur autor, ci va fi rodul cercetărilor conjugate ale unor competențe interdisciplinare de cele mai diferite orientări. Va trebui, de exemplu, să se stabilească în ce fel intuițiile topologice ale lui Huyghe, care vin într-un mod atît de neașteptat în întîmpinarea proceselor de tip Fibonacci caracteristice viziunii lui Ghyka, în ce fel deci reprezentări topologice la care se referă Huyghe premerg ideile lui René Thom, care preconizează o teorie unitară și globală a evoluției formelor, bazată pe conceptele topologiei diferențiale (varietăți diferențiabile, cîmpuri de vectori, sisteme dinamice). Thom se revendică de la un precursor ca D'Arcy Thompson, dar de la acesta din urmă la cel dintîi există mai multe trasee și aproape toate trec prin Ghyka. Este

de asemenea important faptul că viziunea lui Thom include atît mişcarea biologică, cît şi aceea a gândirii şi limbajului, extinzînd astfel considerabil cadrul în care se situa D'Arcy Thompson, dar raliindu-se în acest fel, dintr-o direcţie nouă, la viziunea lui Ghyka şi la aceea a lui Huyghe, aceştia din urmă dînd o slabă atenţie aspectelor de limbaj, dar o deosebită atenţie gândirii plastice.

Interesant este şi traseul urmat de Hermann Weyl care, prin referirile la opera lui George David Birkhoff şi la structurile de simetrie ale marilor opere de artă, trece prin chiar inima preocupărilor lui Ghyka (la care figurile şi corpurile sînt considerate tocmai în funcţie de proprietăţile lor de simetrie), fără a-l menţiona totuşi vreodată pe acesta. Weyl îşi distribuie atenţia între fenomenele de simetrie ale structurilor cristaline şi cele care apar în lumea organică, întocmai cum Ghyka era preocupat de regularităţile din regnul mineral, ca şi de cele din regnul vegetal şi cel animal. Cochiliile şi formele elicoidale care stau în atenţia lui Weyl amintesc (pînă şi prin figurile care le ilustrează) de regularităţile dominate de şirurile lui Fibonacci şi de proporţia de aur care-l obsedau pe Ghyka. Dar atunci cînd este vorba de a se face joncţiunea cu cercetările anterioare pe această temă, Weyl nu trimite la reprezentul lor cel mai calificat, adică la Ghyka, ci la J. Hambidge, a cărui lucrare *Dynamic symmetry* (pe care dealtfel o menţionează şi Ghyka) conţine la pp.146—157 observaţiile matematicianului R. C. Archibald asupra spiralei logaritmice, asupra numărului de aur şi asupra şirurilor lui Fibonacci. Preocuparea lui Weyl de a pune în evidenţă structurile algebrice care domină fenomenele de simetrie se situează şi ea în continuarea firească a eforturilor lui Ghyka (încă din prima sa carte, din 1927, apoi în *Le nombre d'or* şi, mai ales, în *Philosophie et mystique du nombre*) de a marca utilitatea teoriei grupurilor şi a altor formaţiuni algebrice în cercetarea estetică. Această preocupare este, la Ghyka, doar una din componentele unui remarcabil efort interdisciplinar şi sintetizator de a cuprinde, într-o tratare unitară, punctele de vedere moderne în discipline atît de variate ca fizica, chimia, biologia, metamatematika, obţinînd astfel o privire multilaterală asupra armoniilor figurale şi ritmice şi asupra sugestiilor pe care ştiinţele naturii le dau esteticii. Acum, cînd gândirea interdisciplinară se află la ordinea zilei într-atît încît unii o mimează numai pentru

a părea moderni, este necesar să ne amintim de Matila Ghyka, unul din pionierii acestei gândiri, în forma ei cea mai îndrăzneată: logodirea esteticii cu matematica și cu științele naturii.

Cărțile lui Jacob și Monod ar putea constitui punctul de plecare al unei confruntări între mișcarea formelor vii, așa cum este ea descrisă la D'Arcy Thompson și Ghyka și viziunea care rezultă, în această, privință, din noile cuceriri ale biologiei și geneticii. În particular, vom observa că Jacques Monod include, în cadrul mișcărilor mai importante care s-au produs în biologia modernă, și apariția concepției generative asupra limbajului, concepție datorată lui Noam Chomsky, la care aderă: „On sait que selon Chomsky et son école, sous l'extrême diversité des langues humaines, l'analyse linguistique en profondeur révèle une «forme» commune à toutes ces langues. Cette forme doit donc, d'après Chomsky, être considérée comme *innée* et caractéristique de l'espèce. Cette conception a scandalisé certains philosophes ou anthropologistes qui y voient un retour à la métaphysique cartésienne. A condition d'en accepter le contenu biologique implicite, cette conception ne me choque nullement. Elle me paraît naturelle au contraire, dès lors qu'on admet que l'évolution des structures corticales de l'homme n'a pu manquer d'être influencée, pour une part importante, par une capacité linguistique très tôt acquise à l'état le plus fruste” (J. Monod, op. cit., p.150). De aici, pînă la recunoașterea reprezentării competenței lingvistice sub forma unei mașini nu este decît un pas. Ipoteza că tocmai această mașină este cea după care sînt modelate toate celelalte competențe umane, deci toate tipurile de creativitate umană, apare astfel foarte atrăgătoare; în parte a și fost testată, în parte abia urmează să fie. Rezultatele în a căror posesie se află actualmente știința și filozofia sînt, în această privință, foarte promițătoare. Structurile pe care lingvistica modernă le-a pus în evidență, în ceea ce privește limbajul articulat, demonstrează o amplă capacitate explicativă în raport cu cele mai variate competențe ale activității umane. Pentru a rămîne în domeniul evoluției și generării formelor vizuale, căroră Ghyka le-a acordat o atît de mare atenție, vom arăta în cele ce urmează cît de esențial reia teoria modernă a gramaticilor picturale (pentru noțiunile de bază ale acestei teorii trimitem la lucrările lui Alan C. Shaw,

S. Kaneff și A. Rosenfeld, menționate de noi în lucrarea din „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol. 11, 1974, no.1) anumite procedee generative pe care Ghyka le așază în centrul preocupărilor sale. Ghyka urmărește tot timpul nu structuri încrămenite, ci procese care surprind mișcarea, generarea, devenirea formelor. Tocmai din acest punct de vedere este cu deosebire apreciată arta orientală; un peisaj chinez sau japonez este capabil să sugereze, prin creșterea arborilor, o intensă vitalitate, simbolizând însăși ideea de germinație. Liniile mari ale compoziției sugerează forțele tectonice care dau naștere unui munte, iar faliiile evocă dinamismul unui conflict (*Esthétique des proportions ...*, p.22). Numărul de aur rezultă tocmai dintr-un atare principiu generativ și, în același timp, de optimizare, deoarece el este singurul care conduce la o împărțire nesimetrică a unui segment, în așa fel încât puterile sale succesive să dea naștere unui șir al lui Fibonacci, deci unui proces generativ cu caracter dublu aditiv, deoarece la fiecare etapă ultimii doi termeni obținuți generează prin adăugare termenul imediat următor. Recurența de tip Fibonacci este, astfel, unul dintre cei mai vechi strămoși ai așa-numitelor reguli cu autoincluziune (*self embedding rules*) din teoria gramaticilor formale (vezi S. Marcus, *Gramatici și automate finite*, Ed. Academiei, București, 1964). Această recurență simulează procedeul aristotelic prin care o figură adăugată la o figură dată conduce la o nouă figură, asemenea cu prima. Astfel, dacă plecăm de la un dreptunghi ale cărui dimensiuni a și b dau un raport egal cu numărul de aur, atunci, lipind de acesta, în picioare, un dreptunghi de aceleași dimensiuni, se obține din nou un dreptunghi ale cărui dimensiuni $(a + b)$ și a sînt într-un raport egal cu numărul de aur. Procedeul poate fi continuat, obținîndu-se un proces de creștere dreptunghiulară care menține unitatea (numărul de aur) în varietate (schimbarea dimensiunilor dreptunghiului). Primele etape ale acestui proces sînt prezentate în fig.1; am putea construi și gramatica picturală corespunzătoare, dar preferăm să ilustrăm acest mod lingvistic de abordare pe un alt exemplu: acela al generării unor scări cu un număr de trepte din ce în ce mai mare.

Vom considera trei tipuri de figuri elementare (vezi fig. 2) a constînd din două pătrate egale cu laturile paralele cu axele, astfel încît vîrfurile de sus din dreapta al primului pătrat să co-

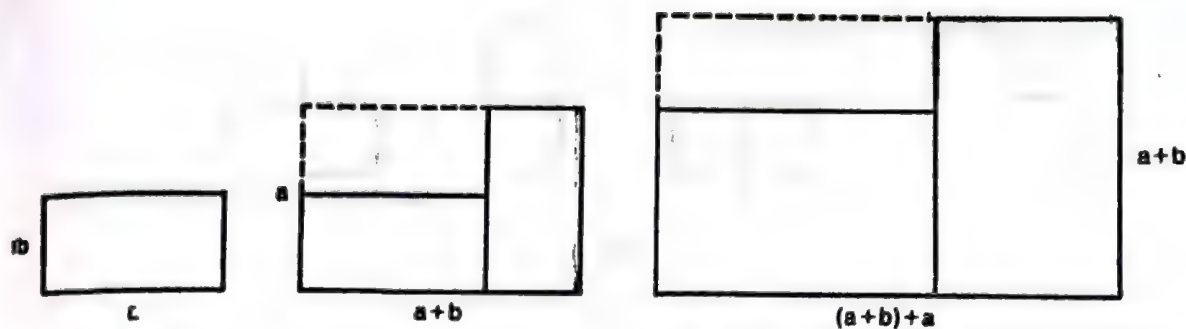


Fig.1.

incidă cu vârful de jos din stînga al celui de-al doilea pătrat; b constînd din două pătrate egale, cu laturile paralele cu axele, astfel încît latura din stînga a celui de-al doilea să se suprapună cu latura din dreapta a celui dintîi; c constînd din două pătrate egale, cu laturile paralele cu axele, astfel încît latura de jos a celui de-al doilea să se suprapună cu latura de sus a celui dintîi. Toate pătratele considerate au aceleași dimensiuni. La fiecare figură distingem un cap și o coadă (deci o orientare). La a coada este pătratul din stînga, iar capul cel din dreapta; la fel la b ; la c coada este pătratul de jos, iar capul cel de sus. Definim o operație de adunare $+$ a două figuri, operație al cărei rezultat este figura care se obține suprapunînd capul primei figuri pe coada celei de-a doua. Definim apoi o operație stea $*$ a două figuri, operație al cărei rezultat este figura care se obține suprapunînd (dacă este posibil!) cozile între ele și capetele între ele. La fiecare din cele două operații coada figurii obținute este coada primei figuri, iar capul figurii este capul celei de-a doua figuri. Fie acum două simboluri S și A și fie colecția G constînd din mulțimea $\{a, b, c\}$ numită vocabular terminal, mulțimea $\{S, A\}$ numită vocabular neterminal (unde simbolul S — numit și axioma gramaticii — este simbolul de plecare) și mulțimea de reguli (unde $u \rightarrow v$ înseamnă că u se înlocuiește cu v)

$$(1) \quad S \rightarrow b + c$$

$$(2) \quad \begin{cases} S \rightarrow [(a + S) + c] * A \\ A \rightarrow A + a \end{cases}$$

$$(3) \quad A \rightarrow a,$$

unde acolada numerotată cu (2) arată că regulile pe care ea le cuprinde se aplică obligatoriu împreună, în ordinea indicată. O astfel de gramatică corespunde la ceea ce, în

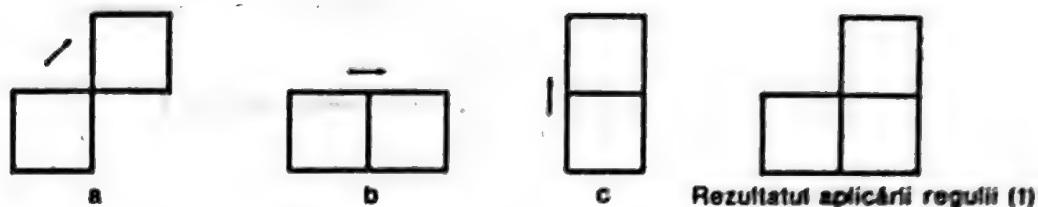


Fig.2.

teoria gramaticilor formale, se numește o gramatică matricială. Pentru a genera o scară de dimensiune 2 (a se vedea fig.2) este suficient să aplicăm regula (1). Pentru a genera o scară de dimensiune 3 — deci cu trei trepte — vom aplica mai întâi cuplul (2) de reguli, apoi regulile (1) și (3). O scară cu patru trepte se obține aplicând de două ori cuplul (2), apoi regulile (1) și (3). O scară cu n trepte se obține aplicând de $n-2$ ori cuplul (2), apoi regulile (1) și (3). Primele trei etape ale acestui proces sînt ilustrate în fig.3. Observăm că scara cu n trepte se obține din scara cu $n-1$ trepte, aplicîndu-i o dată cuplul (2) și apoi regulile (1) și (3). Regulile care alcătuiesc cuplul (2) au o particularitate importantă: simbolul neterminal din stînga (S în prima regulă, A în a doua) reapare în membrul al doilea al regulii. Astfel de reguli se numesc *recursive* (sau *cu autoincluziune*) și pot fi aplicate în mod iterativ, posibilitate care a fost esen-

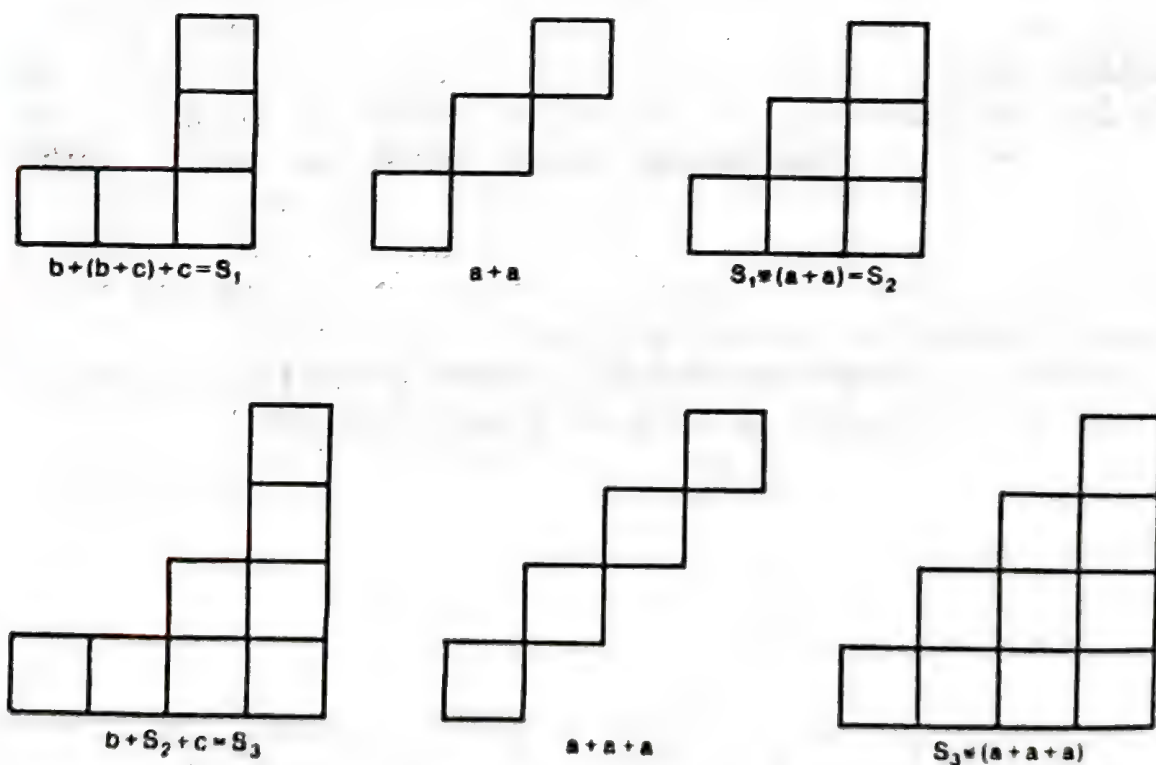


Fig.3.

țial folosită mai sus. Se observă și motivul pentru care am cuplat cele două reguli care alcătuiesc pe (2) : în felul acesta, cele două reguli sînt repetate *de același număr de ori*, satisfăcînd astfel necesitatea ca numărul de trepte ale scării să fie egal cu numărul de pătrate de la baza scării și cu cel al pătratelor de pe verticala scării.

Recunoaștem, în procesul descris, aceeași idee care stă la baza șirului lui Fibonacci. Putem spune că Ghyka a lucrat cu o gramatică picturală particulară, în care singura regulă folosită era aceea indusă de numărul de aur, în modurile arătate mai sus. Astăzi însă știm să explicităm și multe alte procese generative. Am discutat recent (S. Marcus, *Linguistic structures and generative devices in Molecular Genetics*, „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol.11, 1974, no.1) gramaticile generative ale eredității, în cadrul cărora multe idei enunțate de Jacob și Monod în cărțile mai sus menționate și de alți savanți (pe care nu-i mai discutăm aici) capătă o explicitare tehnică. Sistemele generative inaugurate de Aristid Lindenmayer (*Cellular automata, formal languages and developmental systems*, Proceedings of the IV th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971 ; North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973) sînt capabile să simuleze procesele de dezvoltare celulară în organisme filamentoase și ocupă de pe acum o foarte bogată literatură. Toate aceste procedee generative moderne, care pun în mișcare importante capitole ale logicii matematice și algebrei și se prevalează de modele recente în biologie, lingvistică, arhitectură și alte domenii, oferă cadrul adecvat pentru o nouă lectură a operei lui Ghyka, pentru o fundare modernă și unitară a procedeeelor și considerațiilor sale. Este regretabil că această operă a fost multă vreme neglijată de către cercetătorii români (cu excepția articolului lui P. Comarnescu, nu cunoaștem decît un articol, în manuscris, al lui Stamatescu), iar unele referințe la opera sa sau la numele său vin tocmai din partea unor autori care-și iau imediat distanța necesară pentru a se dirija într-o altă direcție (cum procedează Andrei Pleșu în cartea, dealtfel interesantă și incitantă *Călătorie în lumea formelor*, Ed. Meridiane, București, 1974 ; atragem atenția cititorului și asupra densei prefete a lui Ion Frunzetti, de un interes care depășește scopul pe care și l-a propus). O carte ca aceea a lui Tiberiu Roman (*Sime-*

tria, Ed. Tehnică, București, 1963), care oferă un cadru optim pentru discutarea ideilor lui Ghyka, se mulțumește să-l menționeze doar în treacăt. Rămîne de asemenea să se testeze relevanța secțiunii de aur în domeniul poeziei și al structurilor narative, al teatrului și filmului. După cum se atrage atenția în cartea lui Martin Gardner (*Mathematical Games from Scientific American*, cunoscută de noi prin intermediul traducerii în limba rusă, Izd. Mir, Moscova, 1974), există deja opere literare importante (ca aceea a lui Șota Rustaveli) în care s-a detectat prezența numărului de aur (op. cit., p.393).

Opera lui Matila Ghyka este prin excelență o operă deschisă, care ne invită mereu la o nouă lectură, în funcție nu numai de achizițiile noi ale științei, ci și de propria noastră sensibilitate.

PIUS ȘERBAN COCULESCU (PIUS SERVIEN)

Fiu al binecunoscutului astronom român Nicolae Coculescu, Pius Servien — pe numele său adevărat Șerban Coculescu — este autorul unor lucrări interesante și valoroase de stilistică, poetică, filozofia științelor și fundamentele matematicii, publicate în Franța, între 1925 și 1953.

Născut în 1903, în România, Pius Servien avea să părăsească țara la vârsta de 13 ani, plecând în Franța. De atunci a mai vizitat de două ori țara noastră, prima oară în 1926—1927, pentru a face serviciul militar, iar a doua oară în 1938. Și-a trecut doctoratul în litere în 1928, la Paris. A murit în 1959, în Franța. De formație umanistă complexă, cu vaste cunoștințe atât în domeniul științelor exacte, cât și în cel al artelor și literaturii, el s-a integrat în mod organic în cultura franceză, câștigându-și o înaltă apreciere atât din partea unor matematicieni ca Borel, Hadamard, Montel și Denjoy sau fizicieni ca Dirac, cât și din partea unui poet ca Paul Valéry. Cu excepția volumului de poezii *Curgînd clepsidra* și a eseului *Introducere la un mod de a fi* (Scribul Românesc, București, 1927), întreaga sa operă este scrisă în limba franceză.

Pius Servien a desfășurat o activitate publicistică bogată, destul de eterogenă și de inegală ca valoare. Ne vom opri aici numai asupra unor părți ale acestei activități. Ne exprimăm recunoștința față de prof. Constantin Drîmbă, pentru a ne fi atras atenția asupra cercetărilor lui Servien și pentru a ne fi pus la dispoziție unele documente și date interesante relative la acest savant. Profesorul C. Drîmbă a fost prieten apropiat al lui Servien în timpul șederii sale în Franța.

În 1964, cînd am început a ne interesa de opera lui Servien, am urmărit publicațiile culturale românești din perioada ulterioară celui de-al doilea război mondial, pentru a vedea modul în care a fost considerată opera sa în lumina dezvoltării recente a științei și a teoriei literare. Nu am

găsit însă absolut nimic. Nici matematicienii, nici filozofii, nici lingviștii, nici teoreticienii artei și literaturii nu luaseră în discuție, nici măcar nu consemnaseră ideile lui Servien. La 5 martie 1965 am ținut, în cadrul Cercului de poetică de sub conducerea prof. Alexandru Rosetti, o expunere intitulată *Un precursor al poeziei matematice: Pius Servien*, expunere care a fost publicată în același an în revista „Studii și cercetări lingvistice” și, într-o versiune în limba franceză, în revista „Revue roumaine de linguistique”. De atunci, opera lui Servien a rămas în permanență în atenția noastră, ea ne-a stimulat într-o activitate care, în 1970, ne-a condus la publicarea unei monografii de poetică matematică, la baza căreia se află ideile lui Servien. Între timp, mulți alți cercetători au reluat fie aceste idei, fie rezultatele noastre cu privire la ele; vom căuta să dăm o imagine parțială a lor în cele ce urmează, imagine cu atât mai necesară cu cât nici pînă astăzi nu dispunem de o ediție românească selectivă a operei lui Servien și de o evaluare critică mai sistematică a ei, în timp ce atîți autori de importanță mai mică au fost de mult editați și înconjurați de atenția criticii.

Dintre lucrările lui Servien, ne-au reținut în special atenția, prin caracterul lor de pionierat, prin anticiparea îndrăzneată a unor idei centrale astăzi în lingvistica matematică și în poetica matematică: *Le langage des sciences* (Paris, 1931; o nouă ediție în „Actualités scientifiques et industrielles”, Paris, 1939), *Principes d'esthétique; problèmes d'art et langage des sciences* (Boivin, Paris, 1932—1935); *Esthétique* (Payot, Paris, 1953). Prin aceste lucrări, Pius Servien este, după cum vom arăta, un precursor de seamă al unor teorii recente, deosebit de actuale. Cu deosebire importantă ni s-a părut această ultimă carte a lui Servien, care, așa cum indică și subtitlul ei (*Musique-peinture-poésie-science*), este o sinteză a concepțiilor autorului asupra artei și științei. Mai mult decît atît, această carte selectează și sintetizează din toate cărțile sale anterioare ideile cele mai interesante, înglobîndu-le într-o expunere coerentă și unitară. Cu acest prilej, am căpătat convingerea că în gîndirea atît de originală și de multilaterală a lui Servien axul central este constituit de teoria sa privind cei doi poli ai „limbajului total”; limbajul științific și limbajul liric. Vom începe deci cu prezentarea acestei teorii, multă vreme ignorată, dar a cărei actualitate continuă să crească, dato-

rită modului exemplar în care se pun jaloanele unui proces de modelare matematică de o deosebită capacitate explicativă.

Limbajul științific (*LS*) este definit de Servien în opoziție cu limbajul liric (*LL*). Mai întâi, fiecare frază din *LS* are un sens unic determinat, în timp ce fiecare frază din *LL* are o infinitate nenumărabilă de sensuri (o mulțime este numărabilă dacă elementele ei pot fi numerotate; prototipul mulțimilor infinite numărabile îl constituie mulțimea numerelor întregi pozitive $1, 2, \dots, n, \dots$, în timp ce prototipul mulțimilor nenumărabile îl constituie totalitatea punctelor unei drepte sau ale unui segment de dreaptă). Servien compară sensurile unei fraze din *LL* cu variațiile infinite ale unui chip omenesc, care în fiecare moment este altfel decât în fiecare din momentele precedente.

Însă proprietatea care, pentru Servien, este definitorie, deci fundamentală, liminară pentru *LS* este alta. Ea constă în faptul că orice aserțiune în *LS* poate fi parafrazată, exprimată într-un fel diferit, dar perfect echivalent. Această modificare este posibilă într-o infinitate de moduri.

Orice frază din *LS* admite deci o infinitate de fraze echivalente, adică avînd același sens cu ea. Tocmai acest fapt face posibile, în *LS*, definițiile și demonstrațiile. O definiție este indicarea unei perechi de fraze echivalente, iar o demonstrație este, de multe ori, de exemplu atunci cînd se stabilește o condiție necesară și suficientă pentru ca un anumit fapt să aibă loc, indicarea unui șir de fraze echivalente. Existența frazelor echivalente este strîns legată, pentru Servien, de existența, în *LS*, a frazelor nule, adică a frazelor care, adăugate altora, nu aduc nici o modificare de sens. De exemplu, fraza „doi plus trei fac cinci” — pe care Servien o dă ca exemplu de frază din *LS* — este echivalentă cu fraza „doi plus trei fac cinci plus unu minus unu”. Aici, fraza „plus unu minus unu” este o frază nulă. În schimb, în *LL* nu există fraze nule (nici măcar fraza vidă, tăcerea, nu e aici nulă!) și nu există fraze echivalente. Fiecare frază din *LL* este un unicat, irepetabilitatea sensului fiind esențială pentru o astfel de frază. Acestei fraze i se asociază un fascicol de sensuri, care se prezintă ca un spectru continuu. Fiecare iradiere a acestui spectru este sesizată de un anumit individ uman și numai unul, într-un moment bine determinat al existenței sale.

Cîteva comentarii sînt necesare, înainte de a merge mai departe. Mai întîi, trebuie să observăm că Servien are în vedere un concept de limbaj științific care se definește printr-o anumită funcționalitate, anume funcționarea unui atare limbaj se sprijină esențial pe posibilitatea de a opera substituiți prin echivalență. Această „sinonimie infinită” nu numai că nu vine în contradicție cu precizia *LS*, dar nici nu ar fi posibilă fără această precizie, deoarece sinonimia a două expresii constă în identitatea semnificației lor, deci fără unicitatea acestei semnificații nici nu am ști despre ce identitate este vorba. La rîndul ei, fenomenul de sinonimie infinită întărește precizia limbajului științific, deoarece face posibile, cum am observat, definițiile și demonstrațiile. Cu alte cuvinte, un termen sau o frază se precizează în măsura în care semnificația corespunzătoare reușește să se metamorfozeze dintr-o proprietate contextuală într-una definițională. (Am analizat distincția dintre aceste două tipuri de semnificații într-un articol recent din „Noesis”, vol.2, 1974.)

Statutul pe care Servien îl acordă semnificației lirice nu numai că face imposibilă, dar face chiar lipsită de sens existența sinonimiei în *LL*. Într-adevăr, nu putem pune problema echivalenței semantice a două expresii din *LL*, atîta vreme cît, chiar într-un context fixat, ele generează, fiecare în parte, un spectru continuu de semnificații. Aici însă se pun unele probleme delicate, pe care Servien nu le-a putut elucida și care au făcut obiectul unor cercetări asidue în ultimii ani: Este influența lecturii singura sursă a omonimiei (ambiguității) infinite a *LL*? În cazul negativ, care sînt celelalte surse ale acestei ambiguități? Pot fi ele descrise cu ajutorul unor structuri metrice sau fac ele necesar un aparat topologic mai special?

Nu se poate spune că ideile lui Servien vin în întîmpinarea unor intuiții comune în acest domeniu. Este foarte răspîdită și acum impresia că limbajul poetic este cel care se bazează pe sinonimie. În timp ce limbajul științific o evită, pentru a nu-și altera precizia. Astfel, M. Radu (*Actes du X^o Congrès International des Linguistes*, vol. III, pp.74—75) crede că termenii tehnici nu pot fi substituiți cu alții, în timp ce sursa expresivității poetice se află tocmai în substituirile sinonimice. O confuzie similară apare recent la Bruno Traversetti și Stefano Andreani (*Le strutture del linguaggio poetico*, Edizioni RAI, 1972, p.173), care,

referindu-se la situația limbajului poetic, scrie : „La parola diventa infatti intercambiabile ; l'uso della parola viene insegnato come intercambiabile. La soddisfazione dell'esperienza poetica diventa allora il livello della traduzione ...”

O situație delicată o prezintă aserțiunea lui Servien cu privire la „frazele nule”. Dacă inexistența lor în *LL* este în afară de orice îndoială, statutul acestor fraze în *LS* pare a fi mai complex decât l-a prevăzut Servien. Chiar exemplul său, menționat mai sus, „plus unu minus unu” este o frază a cărei semnificație este departe de a fi nulă, ea exprimând faptul că adunarea și scăderea aceluiași număr sînt două operații inverse una alteia ; deci nu semnificația expresiei considerate este nulă, nul fiind doar rezultatul aplicării operațiilor pe care această expresie le indică.

După cum se observă, apartenența unei fraze la *LS* este, pentru Servien, incompatibilă cu apartenența sa la *LL*. Aici trebuie însă să introducem o modificare, care să dea modelului lui Servien mai multă suplețe. În loc de a considera *LS* și *LL* ca două limbaje disjuncte, este mult mai comod — și mai adecvat realității — să admitem că fiecare frază aparține *LL* (deci să admitem că nu există fraze prin ele însele apoetice), iar *LS* este o parte a *LL* — eventual, chiar $LS = LL$. Cu alte cuvinte, fiecare frază este susceptibilă de două ipostaze, una prin care ea aparține *LS* și alta prin care aparține *LL*.

Pot exista fraze care încă nu au fost integrate *LS* sau *LL*, dar nu i se poate nega nici unei fraze această capacitate. Baudelaire și Arghezi au încorporat în *LL* numeroase fraze considerate pînă la ei apoetice, iar alte fraze, considerate astăzi apoetice, vor fi inserate într-un context care să le confere poezie, mîine. Cu alte cuvinte, apartenența unei fraze la *LS* sau *LL* nu este o proprietate intrinsecă a acestei fraze, ci un raport al ei cu contextul în care este plasată. Să luăm chiar exemplul folosit de Servien. O frază de tipul «*deux et deux quatre*» nu aparține totdeauna lui *LS*, așa cum afirmă Servien ; ea aparține lui *LS* atunci cînd se află într-un manual de aritmetică sau este folosită într-o operație de contabilitate. Dar aceeași frază constituie primul vers din poezia *Page d'écriture* a lui Jacques Prévert. În acest din urmă context, „doi și cu doi fac patru” nu mai este echivalent cu „doi și cu doi fac patru plus unu minus unu” ; aici nu mai există fraze nule, nici

fraze echivalente, fraza „doi și cu doi fac patru” devine o frază din *LL*. „Poetul scoate cuvintele din starea lor naturală și le aduce în starea de grație” spune Lucian Blaga. Jacques Prévert a adus în starea de grație o frază în aparență atât de banală ca „doi și cu doi fac patru”.

Dar dacă o frază din *LS* admite o infinitate de fraze echivalente, aceasta înseamnă că sensul exprimat de ea manifestă o relativă independență de materialul sonor; într-adevăr, două fraze echivalente pot fi foarte diferite ca structură sonoră (frazele „unu este mai mic decât doi” și „diferența dintre cinci și trei este mai mare decât diferența dintre patru și trei”, deși echivalente, au foarte puțin comun ca structură sonoră). Nu același lucru se întâmplă cu o frază din *LL*. Varietatea de sensuri cu care este ea încărcată depinde esențial de structura sonoră, deoarece o modificare oricât de mică a acestei structuri introduce o perturbație în implicațiile ei afective. Ajungem astfel la o nouă distincție între *LS* și *LL*: primul nu depinde de structura ritmică a frazelor, pe când al doilea este esențial dependent de această structură. Într-adevăr, ritmul unei fraze revine după Servien la un șir finit de numere întregi pozitive, numărul de termeni ai acestui șir fiind egal cu numărul de silabe accentuate existente în frază, iar termenul de rang n al șirului fiind egal cu suma dintre 1 și numărul de silabe neaccentuate care separă a $n-1$ -a silabă accentuată de a n -a silabă accentuată. De exemplu, ritmul versului eminescian „Mai am un singur dor” este dat de șirul 2, 2, 2. Se știe însă că într-o limbă naturală nu putem avea oricât de multe silabe neaccentuate consecutive; fiecărei limbi naturale i se asociază un număr întreg pozitiv p , astfel încât să nu putem avea, în limba respectivă, mai mult de p silabe neaccentuate consecutive. De aici rezultă că ritmul unei fraze nu poate conține termeni mai mari ca $p + 1$. Pe de altă parte, este clar că două fraze de aceeași structură ritmică au același număr de silabe accentuate, deci șirurile asociate au același număr n de termeni. Deoarece nu există decât un număr finit de șiruri de lungime n , având ca termeni numere întregi pozitive mai mici ca $p + 2$, rezultă că numărul frazelor care au aceeași structură ritmică cu o frază dată este finit. Însă pentru orice frază din *LS* există o infinitate de fraze echivalente cu ea, deci o infinitate de fraze echivalente cu ea și având o structură ritmică diferită. Am demonstrat astfel că sensul unei fraze

din *LS* nu depinde de structura ritmică a acestei fraze.

Din cele de mai sus nu rezultă că în *LS* ritmul este indiferent. Într-adevăr, dintre două fraze echivalente, dar cu structură ritmică diferită, una poate fi mai scurtă, mai simplă, mai elegantă, poate fi mai accesibilă, poate stimula mai mult la reflecție decât cealaltă. În această privință, ritmul poate fi unul din criteriile de selecție a uneia din mai multe fraze echivalente. Un memoriu de matematică își are structura sa ritmică, deloc indiferentă cititorului, deoarece această structură îi impune un anumit regim de activitate a gândirii. Dar, repetăm, această structură ritmică nu influențează sensul exprimat, ci numai modul în care această exprimare se face. Cu totul altfel apare ritmul în *LL*. Aici, structura ritmică a unei fraze nu poate fi despărțită de ceea ce această frază exprimă, ea aparține organic conținutului exprimat. Să ne gândim, de pildă, la pulsația molcomă, de fericită și duioasă reverie, din *Sara pe deal*; oare nu aparține ea însăși substanței acestei poezii? Ar fi oare corect să spunem că aici structura ritmică 13133/23133/23133 ... este, pentru Eminescu, rezultatul unei alegeri dintre mai multe structuri, corespunzătoare unor fraze echivalente? Eminescu ar fi putut oscila, negreșit, între mai multe structuri ritmice, dar aceasta numai atîta vreme cît oscila între mai multe fascicule de sensuri care se cereau exprimate. Odată cu victoria unuia dintre fascicule asupra celorlalte, structura ritmică s-a impus și ea într-un mod unic, deoarece fiecare fascicol de sensuri, prin aderența sa la structura sonoră care-l exprimă, implică o structură ritmică bine determinată.

Cu totul alta este situația în *LS*; aici, după cum am văzut, nici un sens nu implică o structură ritmică determinată, deci mai întîi hotărîm sensul pe care vrem să-l exprimăm, apoi alegem o structură ritmică dintr-o infinitate de structuri posibile.

Studiul structurilor ritmice ocupă o bună parte din opera lui Servien (*Essai sur les rythmes toniques du français*, Presses Universitaires de France, Paris, 1925; *Les rythmes comme introduction physique à l'esthétique*, Boivin, Paris, 1930; *Lyrisme et structures sonores*, Boivin, Paris, 1930). Contribuțiile sale în această privință au avut un larg ecou, fiind menționate printre rezultatele clasice în acest domeniu. Servien este primul care a propus un model matematic al

structurilor ritmice și care a studiat ritmul nu doar ca un ornament al poeziei, ci ca o proprietate generală a limbajului uman. În particular, Servien este cel dintâi care se ocupă de rolul structurilor ritmice în *LS*. O formalizare ulterioară a acestor probleme a fost dată în articolul nostru *Langage scientifique, structures rythmiques, langage lyrique* (în „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol.5, 1968) și reprodusă în capitolul IV din cartea noastră *Poetica matematică* (Ed. Academiei, 1970). Considerațiile lui Servien relative la ritm și la probabilitate prefigurează cercetările de mare amploare ale lui A. N. Kolmogorov și ale colaboratorilor săi din urmă cu vreo zece ani (în „Voprosy jazykoznanija”, anii 1962, 1963, 1965), cercetări care își îndreaptă atenția asupra diferitelor tipuri de distribuții probabilistice care guvernează ritmul unei opere, unui poet sau unei limbi în care nu există o regulă fixă a accentului.

Ajungem astfel la problema stilului. Dacă înțelegem stilul în sensul Retoricii clasice, ca o problemă confruntată nu atât cu ceea ce avem de spus, ci cu *modul* în care o spunem, atunci în *LS* problemele de stil sînt cu adevărat la ele acasă, pentru că efectiv se pune, pentru fiecare sens care se cere exprimat, chestiunea unei alegeri, a alegerii unei fraze dintr-o infinitate de fraze care exprimă sensul respectiv. În această alegere ne folosim de numeroși factori, dintre care unii au fost semnalati mai sus. Posibilitățile infinite ale unei astfel de alegeri explică, în bună măsură, de ce este posibil să recunoști un matematician chiar dintr-o expunere a unor rezultate cunoscute, neoriginale. Să luăm, de pildă, primul volum al tratatului de teoria funcțiilor de variabilă complexă al lui Simion Stoilow. Aici sînt prezentate aspecte clasice ale acestei teorii, noțiunile și teoremele nu aparțin autorului, multe dintre ele sînt cunoscute încă din secolul trecut. Toate aceste fapte matematice sînt prezentate, bineînțeles, într-o formă mai modernă, dar aceasta se întîmplă și în alte tratate de teoria funcțiilor de variabilă complexă și nu ar fi suficient să imprime acestui tratat puternica personalitate a autorului. Și totuși, orice matematician român va recunoaște aici, numai din cîteva pagini, uneori din numai cîteva fraze, pe Stoilow. Acea îmbinare specifică de economie a expresiei, eleganță a expunerii și proprietate a termenilor, acele formulări care delimitează net esențialul de accesoriu și luminează problematica ulterioară, cine oare le-ar putea atribui altuia

decît lui Stoilow ? Dacă ne referim la memoriile originale ale matematicienilor, personalitatea stilistică devine și mai interesantă. Dar cît de puțin s-a studiat structura stilistică a limbajului științific ! Cele mai multe cercetări lingvistice ale textelor științifice se limitează la chestiuni de terminologie. Printre rarele publicații care ating și alte aspecte, mai structurale, ale *LS*, menționăm : Th. Savory, *The language of science*, Londra, 1953 și *The character of the language of science*, articol publicat în antologia *The world of words*, Boston, 1967 ; Anatol Rapoport, *The language of science, its simplicity, beauty and humor*, în antologia menționată mai sus ; *Osobennosti jazyka naučnoj literatury* (redactor resp. V. N. Jarceva), Izd. Nauka, Moscova, 1965 ; *Stilistiko-grammatičeskie certy jazyka naučnoj literatury* (redactor resp. V. N. Jarceva), Izd. Nauka, Moscova, 1970 ; Solomon Marcus, capitolul III, dedicat limbajului matematic, din cartea *Poetica matematică* ; Sanda Golo-penția-Eretescu, *Formalized languages : scientific, Current Trends in Linguistics*, vol.12, 1974 ; Solomon Marcus, *Semiotics of scientific languages* (Raport general la Congresul Asociației internaționale de studii semiotice, Milano, iunie 1974 ; publicat în Actele acestui congres, Mouton, Haga, 1975) și bibliografia indicată aici. Însă în toate aceste cercetări stilul este înțeles ca un ansamblu de particularități lexicale, gramaticale sau semiotice, nu ca un mod de alegere între expresii echivalente, așa cum preconiza Servien cercetarea stilistică.

Spre deosebire de *LS*, pentru care stilul revine la o selecție între mai multe fraze echivalente, în *LL* o problemă similară a stilului nu există, deoarece aici nu există fraze echivalente. Aici problema stilului este alta. Ea constă, mai întâi, în a sesiza, a intui cu o cît mai mare acuitate, cu o cît mai fină nuanțare, trecerile de la un fascicol de sensuri la altul, pe care le provoacă cele mai mici modificări de expresie, relative fie la fraza în cauză, fie la contextul în care este ea plasată ; apoi, în a definitiva, pe baza acestei sesizări, forma frazelor. Dar fascicolul de sensuri asociat unei fraze în *LL* reunește diferitele sensuri pe care oameni diferiți le asociază, în momente diferite, frazei considerate. Poetul sesizează, într-o perioadă limitată, doar o parte a acestui fascicol. Dacă f_1 și f_2 sînt două fraze diferite, cărora li se asociază, în *LL*, fasciculele de sensuri S_1 și S_2 , s-ar putea întîmpla ca S_1 și S_2 să posede în comun un anumit

subfascicol, fie el S_{12} . Dacă S_{12} este tocmai subfascicolul sesizat de poet în intervalul de timp în care își scrie poezia, este evident că poetul va folosi, în mod indiferent, una dintre frazele f_1 și f_2 , deși, în fapt, numai una dintre aceste fraze era îndreptățită. Dar prin aceasta el a încălcat un imperativ primordial al LL , limbaj care nu admite fraze echivalente. Dacă ținem seamă că, pe parcursul compunerii unei poezii, astfel de situații pot să intervină în număr considerabil de mare, ne dăm seama în ce măsură și în ce fel niște versuri se pot îndepărta, mai mult sau mai puțin, de la poezie, de la LL . Măiestria stilistică revine deci aici la a evita, pe cât posibil, situații de tipul celor descrise mai sus, în care opoziția dintre două fraze ale LL se neutralizează, provocând, în mod accidental, echivalența dintre cele două fraze. Dealtfel, marii poeți au observat de mult acest pericol, și în cele mai bune poeme ale lor orice cititor simte că nici un cuvânt, nici măcar o virgulă, nu pot fi clintite de la locul lor. Dar astfel de situații, în care neutralizarea opozițiilor dintre fraze este în întregime evitată, sînt foarte rare (poate chiar inexistente). Însă orice poet aspiră la aceasta.

Relativa independență a LS de structura sonoră a frazelor constituie o premisă importantă a creării diferitelor limbaje simbolice, folosite în matematică, în fizică, în chimie și în alte științe. Într-adevăr, dat fiind că sensurile, în LS , sînt reprezentate nu prin faze, ci prin clase de fraze echivalente, rezultă că o notație optimă este aceea care notează tocmai aceste clase. Poincaré observa că o notație bună echivalează cu o descoperire. Prin aceasta el recunoștea funcția euristică a stilului în LS . Dar folosirea limbajelor simbolice ne apropie de structura limbajelor logice (artificiale), care manifestă un pronunțat caracter numeric; de aici, observația lui Servien că LS are implicată, în țesătura sa, o structură numerică, structură care va fi explicitată cînd timpul o va cere. Prin aceasta, Servien anticipa o idee care avea să fie în plină actualitate cu douăzeci de ani mai tîrziu și, în continuare, și astăzi, în problema limbilor logice de informație pentru diferitele ramuri ale științei.

Vechiul deziderat al lui Leibniz, de construire a unei limbi universale, l-a preocupat cu insistență pe Servien. El a demonstrat deosebit de convingător că perspectivele construirii unei astfel de limbi sînt oferite tocmai de structura

LS. Într-adevăr, pentru fiecare sens exprimabil în *LS* există, în fiecare limbă naturală, o infinitate de fraze care-l exprimă. *LS* devine astfel acel nucleu lingvistic care-și are reprezentanți în fiecare limbă naturală, puntea de legătură între acești reprezentanți fiind tocmai existența unui sens comun, necondiționat de specificul unei limbi naturale. Dacă adăugăm la aceasta observațiile fine ale lui Servien relative la structura probabilistică a limbii, recunoaștem o prefigurare a preocupărilor atât de actuale, cu douăzeci de ani mai târziu, de construire a unor limbi logice universale. Cercetările matematicianului olandez Hans Freudenthal concretizate în cartea sa *Lincos* (Limba cosmică), apărută în 1960, se află, în germene, la Pius Servien. Servien a insistat asupra necesității de a se studia specificul gramatical al *LS*, observînd că structura gramaticală a acestui limbaj este incomparabil mai simplă decît a *LL*. Acest deziderat a început a fi realizat abia în ultimii ani, odată cu accelerarea preocupărilor de lingvistică aplicată.

Deosebit de judicioase sînt ideile lui Servien relative la problema traducerii. Ramificațiile pe care *LS* le are în toate limbile naturale fac ca, pentru el, traducerea dintr-o limbă în alta să fie pe deplin posibilă. Operația de traducere din limba naturală L_1 în limba naturală L_2 constă aici în trecerea de la o frază din L_1 la o frază din L_2 cu același sens s ca și prima. Dar, deoarece în L_2 există o infinitate de fraze avînd sensul s , rezultă că traducerea *LS* nu este numai o problemă de fidelitate științifică, ci și una de stil. În ceea ce privește *LL*, el nu este traducibil. Ceea ce se numește aici, în mod obișnuit, o traducere, este de fapt un proces de aproximare, căruia i se caută, cu mari eforturi, în ultima vreme, osatura științifică. Pius Servien a pus, în orice caz, problema traducerii pe un teren științific, anticipînd sau prefigurînd unele cercetări valoroase din ultima vreme, datorite lui R. Jakobson (*On linguistic aspects of translation, On translation*, Cambridge, 1959), G. Mounin (*Les problèmes théoriques de la traduction*, 1963 și *La machine à traduire*, 1964) și mai ales lui I. I. Revzin și V. I. Rozențveig (*Osnovy obščego i mašinogo perevoda*, 1964).

Una dintre cele mai interesante idei emise de Servien se referă la obiectul esteticii ca știință. Luînd în considerație, în mod explicit, arta literară, estetica este, după Servien, studiul *LL* și al fasciculelor de sensuri pe care el le expri-

mă, cu ajutorul *LS*. Cu alte cuvinte, estetica, studiind *LL*, își formulează aprecierile cu ajutorul *LS*. Dacă ținem seama că mulțimea sensurilor exprimate în *LL* este nenumărabilă (chiar dacă ne limităm la o singură frază din *LL*) și necuantificabilă, în timp ce mulțimea sensurilor exprimabile în *LS* este numărabilă, discretă, cuantificabilă, rezultă că scopul pe care și-l propune estetica este, într-un anume sens, asemănător multor altor discipline. Într-adevăr, procesul de aproximare a nenumărabilului prin numărabil este o metodă frecventă de cercetare a realității în cele mai multe științe exacte.

Trebuie să recunoaștem că teoria estetică a lui Servien nu s-a bucurat, pînă în urmă cu vreo zece ani, de audiența pe care o merita, în ciuda faptului că tocmai în legătură cu această teorie Paul Valéry (*Le cas Servien, Annexe à Pius Servien*, Orient, Gallimard, Paris, 1942) îi scria: „Vous avez fait la tentative la plus intéressante et la plus hardie que l'on ait faite à ma connaissance pour capturer l'Hydre Poétique”. Într-adevăr, încercarea lui Servien era deosebit de temerară. Ea era parcă o replică la îndoiala amară pe care Rainer Maria Rilke o exprima, la începutul secolului nostru, în ale sale *Scrisori către un tînăr poet*: „Dealtfel, nimic mai rău decît critica pentru a te apropia de o operă de artă, ea nu duce decît la neînțelegeri, mai mult sau mai puțin fericite. Nu orice poate fi cuprins în cuvînt, nu despre totul se poate vorbi, așa cum de foarte multe ori am putea să o credem, sînt întîmplări care rămîn fără grai, ele se petrec pe un tărîm în care cuvîntul nu a pătruns nicio-dată. Iar despre operele de artă este cel mai greu de vorbit, ele sînt existențe tainice, a căror viață veșnică trăiește alături de viața noastră trecătoare”.

Totuși, încercarea lui Servien nu era hazardată. El și-a dat seama, înainte de mulți alții, că arta trebuie abordată pe o cale indirectă. Deoarece *LS* admite o descriere riguroasă, prin metode logico-algebrice, primul model formal al *LL* va fi acea zonă a limbajului total care este în afara *LS*.

Teoria estetică a lui Servien ne apare azi de o mare valoare, deschizînd perspective noi în studiul limbajului poetic. Insuficienta audiență a acestei teorii în rîndul esteticienilor de formație filozofică sau literară (totuși cartea de retorică generală a grupului μ din Liège, carte tradusă recent în românește, în Editura Univers, menționează ideile

estetice ale lui Servien) este nu numai nedreaptă, dar și dăunătoare pentru dezvoltarea unei estetici științifice. Vom încerca, în rândurile următoare, să explicăm semnificația profundă și actualitatea esteticii lui Servien, reluând firul gândirii sale, cu înțelegerea pe care ne-o dă metodologia științifică contemporană.

Mai întâi, vom găsi necesar să înlocuim denumirea de limbaj liric, folosită de Servien, prin aceea de limbaj poetic. Limbajul liric constituie un caz particular al limbajului poetic, acela în care funcțiile principale, dominante, sînt atît funcția poetică (centrată asupra mesajului, pentru a ne referi la schema clasică propusă de Roman Jakobson pentru procesul de comunicare lingvistică), cît și funcția emotivă (centrată asupra emițătorului). Nu credem însă că este necesar să limităm în acest fel raza de acțiune a considerațiilor lui Servien. S-a crezut multă vreme (din păcate, am căzut și noi victimă, în *Poetica matematică*, acestei confuzii) că opoziția dintre științific și poetic corespunde opoziției dintre logic și afectiv, dintre rațiune și emoție. Mulți o mai cred și astăzi. Este adevărat că *LS* prezintă o densitate logică superioară limbajului uzual, că numărul de silogisme este mai mare în cel dintîi decît în cel de-al doilea. Dar ceea ce i se opune, în limbajul poetic, densității silogistice nu este densitatea de emoție (aceasta se distribuie în mod egal între cele două limbaje), ci densitatea de sugestie, adică predilecția limbajului poetic de a trimite *indirect* la anumite obiecte sau stări, de a le sugera doar, în loc de a le numi. Tocmai în acest scop sînt folosite figurile, metaforice sau metonimice și, în general, conotațiile de orice fel în limbajul poetic. Pe de altă parte, aspectul esențialmente silogistic al limbajului matematic, de exemplu, nu trebuie să ne inducă în eroare. „O teoremă este un sentiment” spunea Gr. C. Moisil. Ea ascunde tot atîta zbucium uman cît este nevoie pentru a clădi un poem.

Pius Servien era conștient de faptul că unul dintre dezavantajele principale ale cercetării tradiționale a limbajului poetic rezidă în faptul că metalimbajul folosit în această cercetare este de același tip cu limbajul investigat. Coincidența dintre metalimbaj și limbajul-obiect are consecințe importante. În loc să se obțină o mai bună și mai profundă cunoaștere a naturii limbajului poetic, a modului în care se structurează și este generat acest lim-

baj, se obține (în cel mai bun caz) o nouă operă poetică, o operă poetică de ordinul al doilea, deoarece obiectul ei este tot o operă poetică. Este deci necesar ca metalimbajul folosit să fie un limbaj de un alt tip decât cel poetic. În această privință, nu există nici o alegere. Limbajul cotidian, lipsit de precizie, eterogen și supus fluctuațiilor permanente ale vorbirii individuale, nu corespunde exigențelor unei cercetări riguroase. Am putea chiar spune că cu cât obiectul supus cercetării este mai fluctuant și mai ambiguu, cu atât investigarea acestui obiect reclamă un limbaj mai riguros, pentru a compensa astfel natura singulară a obiectului. În această privință, singurul limbaj acceptabil este cel științific, în accepția considerată de Servien. Nu trebuie să confundăm *LS* al lui Servien cu diferitele realizări concrete ale acestui limbaj, sub forma textelor de diferite specialități tehnico-științifice, realizări impregnate de elemente străine, ale limbajului cotidian și chiar ale celui poetic, sub forma a diferite conotații, imprecizii etc. Am putea spune chiar că *LS* reprezintă de cele mai multe ori o tendință, nu un stadiu atins. Tot așa, limbajul poetic (*LP*) al lui Servien nu poate fi confundat cu diferitele sale realizări individuale, sub forma unor opere poetice determinate, opere din care este greu să se fi eliminat toate reziduurile rutinare ale limbajului cotidian.

Este în afară de orice îndoială că din punct de vedere genetic *LS* și *LP* își au sursa în limbajul uzual. Dar aceasta nu le împiedică să fie esențial diferite din punct de vedere structural și să fie mai simple, fiecare în felul său, decât limbajul matcă din care s-au desprins. Se întâmplă deseori în știință ca ordinea metodologică optimă pentru înțelegerea și prezentarea lucrurilor să fie diametral opusă ordinii lor genetice. Tocmai așa se petrec lucrurile și cu limbajele în discuție. Deși *LS* și *LP* își au sursa în limbajul cotidian, acesta din urmă este mai complex, mai eterogen decât cele dintâi; el se prezintă ca un amestec de elemente de comunicare (aparținând *LS*) și elemente de expresie (aparținând *LP*).

Există patru combinații în utilizarea limbajelor *LS* și *LP* ca limbaje obiect și ca metalimbaje (dacă am adăuga și limbajul uzual, numărul combinațiilor s-ar mări simțitor):
a) *LS* = limbajul obiect, *LS* = metalimbajul; aici intră cercetările de metamatematică; b) *LS* = limbajul obiect, *LP* = metalimbajul; aici intră unele comentarii poetice

asupra limbajului matematic ; pagini memorabile de acest fel aparțin poetului Ion Barbu ; unele fragmente au fost reproduse în capitolul pe care i l-am dedicat în această carte ; c) LP = limbajul obiect, LP = metalimbajul ; aici intră acele texte de critică literară care realizează un comentariu despre LP în termenii aceluiași limbaj ; justificarea epistemologică a unui asemenea demers ar fi aderența la obiect pe care trebuie s-o realizeze actul critic, pentru a fi cât mai pertinent ; aici se înscriu numeroase pagini din *Istoria literaturii române* a lui G. Călinescu (atunci când nu abordează condițiile externe ale operelor literare, ci structura lor imanentă) ; d) LP = limbajul obiect, LS = metalimbajul. Acesta este tipul de cercetare care definește estetica lui Servien. Rațiunea epistemologică a acestui demers este inversă celei de la punctul c ; scopul este aici nu realizarea unei cât mai mari aderențe la obiect, ci a unei cât mai mari distanțări de obiect. Să vedem mai îndeaproape în ce constă acest mod de abordare.

Operînd o selecție în mulțimea proprietăților pe care Servien le atribuie LS și în mulțimea proprietăților atribuite LP , schimbînd puțin terminologia și precizînd puțin lucrurile, în sensul modelului pe care l-am propus în capitolul IV din *Poetica matematică*, vom spune că LS se definește prin absența omonimiei și infinitatea numărabilă a sinonimiei, în timp ce LP se definește prin infinitatea nenumărabilă a omonimiei și absența sinonimiei. *Estetica este deci, pentru Servien, posibilitatea de a aprecia fenomenele irepetabile și infinit ambigue ale poeziei cu ajutorul unor expresii lipsite de ambiguitate și înlocuibile într-o infinitate de feluri prin alte expresii, semantic echivalente.*

Marele merit al acestei viziuni despre cei doi poli ai limbajului uman (limbajul total, cum îl numește Servien) este reprezentarea ei sub forma unui model (în sensul epistemologiei contemporane). Cînd spunem că B este un model al lui A , înțelegem că B este destul de asemănător cu A pentru ca rezultatele obținute în studiul lui B să păstreze o anumită relevanță și în raport cu A ; dar, în același timp, B este destul de diferit de A pentru a face posibilă existența unei metode compatibile cu natura lui B , dar incompatibilă cu natura lui A . Aceste două exigențe care vin una împotriva alteia își au justificarea în faptul că metoda modelării are ca scop investigarea (indirectă) a unui obiect printr-o metodă incompatibilă cu natura sa (investigarea

corpului uman viu prin metoda experimentală; investigarea limbajului natural printr-o metodă axiomatic deductivă etc.). Acea distanțare față de obiect pe care o preconiza Servien vine tocmai în întâmpinarea dezideratului al doilea, privind diferența obligatorie de natură între obiect și modelul său. Rămîne ca, în cadrul *LS*, cu mijloacele specifice lui, să se simuleze cît mai adecvat fenomenele din *LP*. Este deci clar că Servien a pus jaloanele modelării logice deductive a limbajului poetic. Judecată în raport cu momentul în care această întreprindere a avut loc (1931), trebuie să-i recunoaștem caracterul ei de pionierat, imensa ei valoare anticipativă. Într-adevăr, metoda modelării, destul de veche în științele naturii — în special în fizică — era aproape necunoscută în disciplinele umaniste și sociale, pătrunderea ei în această zonă generalizîndu-se abia în ultimii 20 de ani, odată cu dezvoltarea ciberneticii și a calculatoarelor electronice. Distanțarea de obiect pe care o introduce metoda modelării nu este decît o trambulină pentru o nouă apropiere, și mai intimă, de natura obiectului, dar această apropiere este condiționată tocmai de caracterul ei indirect. În schimb, acea aderență la obiect pe care o realizează abordarea de la punctul *c* nu este decît o insinuare în interiorul obiectului, insinuare care poate avea, eventual, efectul unei inițieri magice în structura obiectului, dar care ne îndepărtează considerabil de o cunoaștere lucidă a acestuia.

Concomitent cu Servien, își elaborau punctul lor de vedere alți doi savanți care preconizau utilizarea metodelor matematice în studiul artei: G. D. Birkhoff și Matila Ghyka. Deoarece lui Matila Ghyka îi dedicăm, în această carte, cîteva considerații speciale, ne vom referi la contribuțiile lui G. D. Birkhoff, pentru a pune astfel mai bine în evidență originalitatea contribuției lui Servien. În centrul preocupărilor lui Birkhoff (*Quelques éléments mathématiques de l'art*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928; *Polygonal forms*, Sixth Yearbook of the National Council of Teachers in Mathematics, 1931; *A mathematical approach to Aesthetics*, „Scientia”, 1931; *A mathematical theory of Aesthetics*, The Rice Institute Pamphlet, 1932; *Aesthetic measure*, Cambridge, 1933) se afla problema de a se găsi o măsură a esteticității, privită din punctul de vedere al receptorului. Nu vom insista asupra acestei chestiuni, căreia i-am dedicat un paragraf

în *Poetica matematică* (pp.20—21). Vom aminti doar faptul că Birkhoff a avut în vedere în special artele vizuale, în domeniul cărora anumiți parametri geometrici permit aprecierea gradului de ordine a elementelor și a gradului de complexitate pe care o prezintă o structură vizuală suficient de cuantificată. Plăcerea estetică produsă de această structură este, după Birkhoff, direct proporțională cu ordinea și invers proporțională cu complexitatea structurii. Ulterior, parametrii considerați de Birkhoff au putut fi înglobați într-o viziune mai cuprinzătoare, al cărei suport îl constituie teoria matematică a informației (Max Bense, Rul Gunzenhäuser, Abraham Moles, citați deja în *Poetica matematică*; la ei adăugăm acum pe Sigfried Maser, cu cartea *Numerische Aesthetik*, Stuttgart, 1970—1971), care se aplică cu succes ori de câte ori este vorba de a se măsura o cantitate de informație selectivă (deci care rezultă din selectarea unei variante dintre mai multe posibile). Informația selectivă este foarte importantă în artele vizuale și în muzică, dar mai puțin importantă în artele cuvântului, dominate de informația semantică. Probabil că ideile lui Birkhoff pot fi încă dezvoltate, de exemplu, combinând cunoștințele despre simetrie — în sensul cărții lui H. Weyl din 1952, tradusă și în românește — și teoremele de geometrie combinatorie cu mijloacele teoriei informației, dar această direcție de cercetare nu va putea avea un impact important asupra teoriei literaturii. Mai important este însă un alt fapt. Validând ideile lui Birkhoff despre diferite moduri de a măsura ordinea și complexitatea structurilor vizuale, estetica informațională nu a putut reține interpretarea axiologică dată de către Birkhoff parametrilor săi. Astăzi, încercarea lui Birkhoff de a măsura „plăcerea estetică” apare naivă, existînd un acord unanim asupra faptului că parametrii numerici se referă la structura, nu și la valoarea operei de artă. Dealtfel, ordinea pe care și-o propune s-o măsoare Birkhoff se află într-un raport determinat cu entropia, iar despre aceasta din urmă s-a arătat în anii din urmă că nu măsoară nici valoarea estetică, nici absența ei. Putem deci spune că estetica a reținut și a dezvoltat tehnicile lui Birkhoff, nu și concepția estetică a acestui autor. Cu totul altfel se prezintă lucrurile în ceea ce-l privește pe Servien, căruia dezvoltarea contemporană a esteticii i-a validat atît concepția generală, cît și tehnicile de investigație (în special în ceea ce privește structurile

ritmice, deoarece studiul său asupra celor doi poli ai limbajului total nu comportă aspecte tehnice speciale). Axiomatica lui Servien, deși într-un stadiu structural doar incipient din punct de vedere matematic, demonstrează o deosebită putere explicativă, permițând să se regăsească un mare număr de trăsături importante ale limbajului poetic și ale celui științific (a se vedea și articolele noastre *Two poles of the human language*, I, II, III, „Revue roumaine de linguistique”, 1970, no.3, 4, 5) și se pretează la o matematizare care-i conferă un înalt grad de formalizare (capitolul IV din *Poetica matematică*). Cadrele esteticii lui Servien sînt destul de largi pentru a putea include teoria caracterului deschis al operei poetice (în sensul lui Umberto Eco), reprezentarea acestei opere ca o mulțime de conotații singulare (Hjelmslev, Sørensen, Johansen și, în special, Tzvetan Todorov, *Littérature et signification*, Larousse, Paris, 1967), capacitatea limbajului poetic de a fi mai mult decît un vehicul al semnificației, de a fi el însuși o lume care se află într-o metamorfoză semantică fără sfîrșit (grupul Tel Quel, concepțiile lui Max Bense din „Zusammenfassende Grundlegung moderner Ästhetik”, *Mathematik und Dichtung*, Nymphenburger Verlagshandlung, München, 1965, poezia concretă a lui Pierre Garnier, *Spatialisme et poésie concrète*, Gallimard, Paris, 1968), ideile lui Paul Valéry privind tendința limbajului poetic de a persista ca limbaj după momentul în care a fost sesizat (*The art of poetry*, D. Folliot, tr, New York, 1958). Toate aceste fapte, nu numai că-și găsesc locul în axiomatica lui Servien, dar ele primesc aici o expresie unitară și devin susceptibile de o investigare bazată pe tehnicile matematicii moderne, așa după cum se va vedea în cele ce urmează.

Pentru un ochi care nu este obișnuit cu metodologia matematică, există probabil unele dificultăți în sesizarea semnificației reale a contribuțiilor lui Servien. Într-adevăr, ambiguitatea și non-echivalența semantică a expresiilor poetice sînt lucruri de mult cunoscute. Există o sumedenie de alte proprietăți ale limbajului poetic, de numeroase ori subliniate de la Aristotel, trecînd prin Hegel, pînă în zilele noastre. Meritul lui Servien constă în intuirea ordinii de importanță a proprietăților limbajului poetic, în faptul de a fi sugerat ierarhia lor și de a fi schițat modul de trecere la o abordare axiomatic-deductivă a acestui limbaj; Servien a reușit să distingă între proprietățile primare (deci

ireductibile la altele, mai simple) și proprietățile derivate, care-și găsesc deci locul nu printre proprietățile-axiome, ci printre proprietățile-teoreme. În același timp, ideea de a pune față în față limbajul obiect și metalimbajul dă poeziei lui Servien o eleganță și o precizie necunoscute în acest domeniu.

Poetica este deci studiul expresiilor poetice cu ajutorul celor științifice. Alternativele propuse ca replică la acest punct de vedere (poetica este știință și artă în același timp; poetica nu este nici știință, nici artă; poetica este o artă) sînt doar niște jocuri de cuvinte, dacă nu niște simple neînțelegeri. Se manifestă de multe ori o viziune simplistă, anacronică, despre activitatea științifică, o viziune după care numai lucrurile raționale și explicabile pot forma obiectul unei atari activități. De aici pînă la concluzia imposibilității unei estetici științifice nu este decît un pas; într-adevăr, poezia este, prin natura ei, irațională și inefabilă. Se ignoră faptul că, după exemplul altor discipline, estetica poate utiliza și ea metoda modelării matematice, metodă în baza căreia inefabilul poetic se reprezintă ca limită a unui șir infinit de aproximații explicabile (în felul în care numerele iraționale sînt limite de șiruri infinite de numere raționale). Metoda modelării sacrifică deci caracterul exhaustiv al descrierii și natura specifică a faptului estetic, cîștigînd în schimb în rigoare și în profunzime. Pius Servien și-a devansat epoca, deoarece a preconizat (cel puțin implicit) utilizarea metodei modelării, cu cîteva zeci de ani înainte ca ea să fie acceptată în estetică. Această situație explică audiența relativ redusă a concepțiilor lui Servien printre esteticienii timpului său.

Mai există un aspect al esteticii lui Servien care ar putea explica slabul ei ecou. Elaborînd o concepție originală asupra naturii limbajului poetic, Pius Servien nu a indicat, nici măcar într-un mod sumar, cum s-ar putea utiliza această concepție în studiul efectiv al unei opere poetice determinate. De multă vreme, limbajul poetic este identificat, în realizările sale, la nivelul figurilor, atenția cercetătorilor fiind îndreptată asupra structurilor deviate. Dar esența limbajului poetic nu rezidă în aceste devieri, care, prin ele însele, nu pot crea poezie. Se folosește deci, ca reprezentare aproximativă a limbajului poetic, limbajul figurat, dar, în mod paradoxal, nu se știe bine ce anume se aproximează. Situația este agravată de faptul că gradul de figu-

rare este apreciat în raport cu limbajul uzual, al cărui statut științific este foarte obscur. Tocmai în direcția îndepărtării acestei lacune acționează estetica lui Servien; această estetică ne permite să înțelegem pe o cale indirectă (anume, prin metoda modelării) esența limbajului poetic, la un nivel de abstracție și de generalitate prea ridicat pentru a se putea pune problema unei utilizări directe a rezultatelor în analizele poetice pe text. Reprezentarea dată de Servien ne permite să înțelegem ce anume se aproximează atunci când demersul nostru vizează identificarea unor conotații, sub forma unor figuri metaforice sau metonimice; înțelegem astfel că adevăratul termen de referință în investigarea limbajului poetic nu este limbajul uzual, ci limbajul științific, deoarece figurile interesează, într-un text poetic, numai în măsura în care ele reprezintă niște conotații, iar gradul de conotativitate se apreciază în raport cu *LS* al lui Servien, despre care se poate arăta că este pur denotativ.

O altă nemulțumire generată de estetica lui Servien se referă la problema valorii estetice. Spre deosebire de Birkhoff, Servien n-a manifestat niciodată veleitatea de a măsura „artisticitatea” unei opere de artă. Totuși, aspectele axiologice sînt implicate în însăși țesătura esteticii lui Servien. Este de altfel semnificativ faptul că, pentru a pune în evidență nevoia de colaborare între *LS* și *LP*, Servien imaginează două personaje simbolice: cel care observă și cel care alege. Iată cum descrie el activitatea acestora, în legătură cu creația muzicală. Cel care observă este condamnat să examineze violoncelul, partitura, fără nici o aluzie la sensul lor muzical, la conținutul lor de frumusețe. Acest observator va fi un matematician; sau un fizician, dacă studiază vibrațiile aerului într-o sală de concert. Mai general, el este un om care nu vrea să cunoască, din limbajul total, decît o anumită parcelă, *LS*. Însă acest personaj simbolic nu este suficient pentru cercetare. Pentru a nu-și pune probleme artificiale, el are nevoie de un al doilea personaj, un fel de cobai, un personaj simbolic care se mișcă în celălalt domeniu, în *LP*. Acesta din urmă efectuează alegeri, alege în primul rînd ceea ce i se pare frumos. Această separare a cercetării în două personaje simbolice, cel care observă și cel care alege, exprimă dorința lui Servien de a menține permanent separate demersurile în termeni de *LS* de cele în termeni de *LP*. (*Esthétique*,

p.77). Dar, observă Servien, metoda celor două personaje, metodă pe care o identifică cu o estetică generalizată, precede știința ; ea servește doar pentru a discerne și organiza o critică metodică și conștientă (*Esthétique*, p.82). Estetica științifică începe în momentul în care cele două personaje colaborează. Cel care alege reprezintă detectorul de valoare estetică, iar cel care observă este înarmat cu ceea ce este necesar pentru a se investiga structura operelor de artă. Într-un estetician calificat, cele două personaje trebuie să fie reprezentate în egală măsură. Acel *LL* al lui Servien constituie o idealitate care poate fi luată ca termen de referință pentru aprecierea gradului de poeticitate al unei opere ; anume, acest grad crește atunci când devierea operei considerate în raport cu *LL* scade. Mai precis, cu cât un text răspunde într-o măsură mai mare la exigența omonimiei infinite nenumărabile și la aceea a sinonimiei nule, cu atât el este mai poetic. S-a discutat, într-adevăr, deseori despre capacitatea marilor opere de artă de a genera mereu noi și noi semnificații ; ea rezultă din prima exigență, care include, fără îndoială, toate implicațiile umane și sociale ale operei poetice. În ceea ce privește cea de-a doua exigență, ea exprimă faptul că, cu cât o operă este mai poetică, cu atât mai puțin ea este susceptibilă de echivalențe sinonimice în vreuna din componentele ei. E aici formularea riguroasă a unei intuiții familiare oricărui cititor, intuiție conform căreia, cu cât o operă este mai poetică, cu atât mai puțin este posibilă vreo modificare (adăugire, suprimare, înlocuire) a unui element al ei.

Dacă, în principiu, așa cum am văzut mai sus, idealitatea pe care Servien o propune ca prototip al limbajului poetic este, în același timp, expresia supremă a valorii poetice, măsurarea efectivă a ecartului unei opere în raport cu acest termen de referință rămîne un deziderat a cărui realizabilitate este înscrisă, probabil, în însăși complexitatea sa.

Luînd ca punct de plecare opozițiile stabilite de Servien între *LS* și *LP* și ținînd seama de cercetările noastre din 1970, semnalate mai sus, și mai cu seamă de cele din 1974 (*Fifty-two oppositions between scientific and poetic communication*) vom prezenta acum o versiune ameliorată a acestor opoziții. Vom include și unele false opoziții, datorită faptului că sînt acceptate de un număr mare de autori, dar ne

vom distanța de ele în comentariu (dacă nu am făcut-o deja mai sus) :

LS

- (1) rațional
- (2) explicabil
- (3) luciditate
- (4) semnificații generale și universale
- (5) semnificații obiective
- (6) fixitate în spațiu (independență în raport cu cititorul sau ascultătorul)
- (7) constantă în timp
- (8) dominat de om
- (9) utilizarea expresiilor artificiale
- (10) rol esențial al expresiilor artificiale
- (11) utilizare rutinară a limbajului (toate mijloacele lingvistice au un caracter convențional)
- (12) transparență (limbajul este doar o fereastră prin care privim la semnificația științifică)
- (13) tranzitiv (semnificația științifică poate fi comunicată de la o persoană la alta)
- (14) densitate logică
- (15) uitarea limbajului, după folosirea lui
- (16) traductibilitate
- (17) relativă independență în raport cu expresia
- (18) independență relativă în raport cu structura muzicală
- (19) preponderența aspectelor paradigmatic
- (20) contexte scurte sînt suficiente pentru a determina semnificațiile (tendință spre independență de context)
- (21) preponderența semnificațiilor conceptuale (definiționale)

LP

- emoțional
inefabil
vrajă
semnificații singulare și locale
semnificații subiective
variabilitate în spațiu (dependența de lectură)
- variabilitate în timp
domină pe om
utilizarea exclusivă a expresiilor din limba naturală
rol secundar al expresiilor artificiale
utilizarea creatoare a limbajului (tendința către inovația lingvistică)
opacitate (fereastra este neagră, ea oprește privirea noastră și capătă o semnificație în sine)
reflexiv (semnificația poetică are tendința de a fi îndreptată către eul poetului)
densitate de sugestie
persistența limbajului
- intraductibilitate
dependență strictă în raport cu expresia
dependență strictă în raport cu structura muzicală
preponderența aspectelor sintagmatice
semantica poetică are nevoie de contexte largi (tendință de creștere a dependenței de context)
preponderența semnificațiilor ne-conceptuale (contextuale)

- (22) preponderența aspectului grafic
- (23) sinonimie infinită
- (24) absența omonimiei
- (25) existența frazelor de semnificație nulă
- (26) mulțime numărabilă de semnificații
- (27) mulțime discretă de semnificații
- (28) concordanță între numărul cardinal al mulțimii de expresii și numărul cardinal al mulțimii de semnificații (amândouă sînt numărabile)
- (29) posibilitatea de a rezolva ambiguitățile prin trecere la un nivel superior de abstracție sau la un context mai larg
- (30) stereotipii generale și convenționale
- (31) denotație (tendința de a utiliza semnificațiile pe baza unui dicționar)
- (32) existența problemelor de stil (alegera între expresii sinonimice)
- (33) utilizare esențială a metaforelor
- (34) absența opoziției dintre metaforă și un termen neexpresiv
- (35) existența metaforelor omogene (ambii termeni între care se exercită analogia aparțin aceluiași limbaj: *LS*)
- (36) posibilitatea metaforelor de ordin superior (o metaforă de ordinul n este rezultatul unei analogii cu o metaforă de ordinul $n - 1$)
- (37) pertinența opoziției *adevărat-fals* (în sensul logicii bivalente)
- (38) pertinența opoziției *gramatical-negramatical*
- preponderența aspectului sonor
- absența sinonimiei
- omonimie infinită
- absența frazelor de semnificație nulă
- mulțime nenumărabilă de semnificații
- mulțime continuă de semnificații
- neconcordanță între cele două numere cardinale (primul este numărabil, al doilea este puterea continuului)
- existența unor ambiguități esențiale
- stereotipii particulare și originale
- conotație (tendința de a utiliza expresiile într-o accepțiune diferită de accepțiunea lor de bază)
- absența problemelor de stil (în sensul retoricii clasice)
- utilizarea neesențială a metaforelor
- posibilitatea dezvoltării funcției metaforice în opoziție cu un termen neexpresiv
- eterogeneitatea tuturor metaforelor (un termen aparține limbajului uzual, iar celălalt lui *LP*)
- imposibilitatea metaforelor de ordin mai mare ca unu
- nepertinența opoziției *adevărat-fals*
- nepertinența opoziției *gramatical-negramatical*

- | | |
|---|--|
| <p>(39) utilizarea sistemelor formale cu scopul de a se studia frazele corecte</p> <p>(40) o distanță paradigmatică mare implică o distanță sintagmatică mare</p> <p>(41) o distanță paradigmatică mică implică o distanță sintagmatică mică</p> <p>(42) irelevanța tezei lui Roman Jakobson</p> <p>(43) tendință către utilizarea sistematică a figurilor metaforice și a celor metonimice</p> <p>(44) tendință de utilizare a semnelor motivate (iconice sau indiciale)</p> <p>(45) centrare asupra contextului</p> <p>(46) înalt grad de predictabilitate</p> <p>(47) irelevanța analogului informațional al celui de-al doilea principiu al termodinamicii</p> <p>(48) structură logico-algebrică a semanticii</p> <p>(49) importanța contextului extralingvistic</p> <p>(50) proiectivitatea sintactică a celor mai multe propoziții (dacă <i>a</i> este subordonat lui <i>b</i>, atunci orice termen intermediar este subordonat lui <i>b</i>)</p> <p>(51) validitatea proprietății lui Tesnière a celor mai multe propoziții (fiecare termen are cel mult un regent)</p> <p>(52) distanță normală între un termen dependent și regentul său</p> <p>(53) caracter esențial predicativ</p> | <p>utilizarea sistemelor formale cu scopul de a se studia diferite grade de necorectitudine</p> <p>distanțe sintagmatice mici asociate unor distanțe paradigmatiche mari</p> <p>distanțe sintagmatice mari asociate unor distanțe paradigmatiche mici</p> <p>validitatea tezei lui Jakobson privind proiecția principiului echivalenței de pe axa selecției pe axa combinării</p> <p>tendință de emancipare în raport cu limbajul figurat</p> <p>tendință de utilizare a semnelor nemotivate (simbolice)</p> <p>centrare asupra mesajului</p> <p>grad coborât de predictabilitate</p> <p>relevanța acestui analog (în sensul preconizat de Octav Onicescu; a se vedea și capitolul VI din <i>Poetica matematică</i>)</p> <p>structură topologică a semanticii</p> <p>tendința de utilizare exclusivă a contextului lingvistic</p> <p>tendința de creștere a numărului de propoziții neproiective</p> <p>tendința de încălcare a proprietății lui Tesnière</p> <p>tendință de abatere — într-un sens sau altul — de la distanța normală între termenul dependent și cel regent</p> <p>tendință de utilizare a unor moduri verbale nepredicative</p> |
|---|--|

Opozițiile (1), (16), (23), (24), (25) și (32) sînt cele care, în mod explicit, sînt prezente la Servien. Asimilînd LP cu limbajul faptelor de emoție, Servien a considerat oportun să substituie lui LP pe LL ; dar limbajul liric nu este decît *una* din ipostazele limbajului poetic. Pentru acest motiv și pentru cele arătate mai sus, opoziția (1) nu se susține. Roman Jakobson are mari merite în demonstrarea inconsistenței opoziției (1); într-adevăr, el a definit funcția poetică a comunicării umane drept aceea centrată asupra mesajului (nu asupra emițătorului), deci orice confuzie între LL și LP devine imposibilă. Dar negînd opoziția (1), Jakobson a substituit acesteia o opoziție care ni se pare tot atît de contestabilă: în timp ce LP este centrat asupra mesajului, LS nu este centrat asupra mesajului (se discută în momentul de față dacă funcția primordială în LS este cea referențială sau cea metalingvistică; a se vedea, în acest sens, punctul de vedere al Sandei Golopenția-Eretescu prezentat în *Formalized languages: scientific* în „Current Trends in Linguistics”, vol. XII, Mouton, 1974 și punctul nostru de vedere prezentat în *The semiotics of scientific languages* în Actele Congresului internațional de semiotică, Milano, 1974). Dacă am accepta propunerea lui Jakobson, atunci am obține paradoxalul rezultat conform căruia jocurile de cuvinte, de tipul criptogramelor, anagramelor și al rebusurilor, sînt o manifestare prin excelență poetică. Calculele algebrice sînt și ele, uneori, centrate asupra lor, dar ar fi greu să acceptăm că funcția lor dominantă este cea poetică.

Nu este greu de văzut că un mare număr de proprietăți ale LS decurg direct din proprietatea (23) căreia Servien i-a întrevăzut caracterul fundamental. Multe alte proprietăți, dacă nu decurg din (23), sînt favorizate de aceasta din urmă.

Opoziția (2) este doar parțial adevărată. Teorema lui Gödel, asupra imposibilității formalizării complete a aritmeticii, atrage atenția asupra „inefabilului” unuia dintre cele mai riguroase domenii ale științei. Acest fapt pune întrucîtva sub semnul întrebării opozițiile (3), (8) și (11). Dar (3) este parțial adevărată și în baza lui (4), așa cum (8) rezultă din (23), a cărei sursă se află, în bună măsură, în (14) și (21). Adevărul lui (8) rezidă în faptul că în LS putem alege o expresie dintr-o infinitate, în timp ce în LP fiecare expresie este *impusă* de semnificația ei. Din (23) rezultă (16), (17) și (18). Traducerea din L_1 în L_2

constă în găsirea, în L_2 , a unor expresii sinonimice unor expresii date din L_1 . Aceasta este totdeauna posibil în LS , deoarece familia de sinonime ale unei expresii are reprezentanți în toate limbile naturale. Opoziția (24) este doar o aproximare a opoziției mai fine (29). Alături de ambiguitățile care pot fi eliminate cu ajutorul contextului, LP cunoaște unele ambiguități esențiale. Prezența lor își are originea atât în structura internă a textului poetic (opoziția 31), cât și în proprietatea de *feed-back* a LP (opozițiile (5), (6) și (7)). Din păcate (31) este de multe ori confundată cu opoziția nemetaforic-metaforic. Dar multe metafore sînt denotative și multe conotații nu au caracter metaforic. Explicații detaliate relative la statutul metaforei în LS pot fi găsite în *Poetica matematică*. Colin Cherry observă că, după o lungă folosire, multe cuvinte metaforice devin incorporate în limbă și pierd semnificația lor inițială, încetînd de a mai fi gândite ca metafore (*On human communication*, MIT Press, Cambridge, Mass, 1966). Există deci un proces de transformare a metaforelor poetice în metafore lingvistice. Un fenomen similar (dar nu identic) se petrece cu metafora matematică; dar evoluția acesteia din urmă se efectuează într-un sens opus: în loc să degenereze, ea generează noi metafore matematice, de un ordin superior. În schimb, nu există posibilitatea unor metafore poetice de ordin superior, deoarece în momentul în care s-ar naște o metaforă poetică de ordinul al doilea, cea de ordinul întâi care a generat-o ar înceta de a mai fi poetică. Are deci loc (37).

În relație cu (33), (34) și (35) se află opozițiile (43) și (44). Arta clasică era bazată pe principiul mimesisului și al relațiilor de contiguitate, în timp ce arta modernă intră într-o relație mult mai indirectă cu obiectele lumii reale, fapt care o așează sub influența dominantă a semnelor nemotivate. După cum am arătat recent, în Raportul la Congresul de la Milano, LS generează în mod sistematic și esențial nu numai metafore, ci și metonimii. Întregul LS este deci dominat de semne motivate, unele iconice, altele indiciale. Distincțiile semiotice ale lui Peirce capătă aici o înaltă funcție explicativă.

Ogden și Richards disting între utilizarea simbolică și utilizarea emotivă a limbajului, iar Colin Cherry consideră (ca și Ogden și Richards) că poezia se poate în bună măsură dispensa de utilizarea simbolică a limbajului. Dezvoltarea

poeziei moderne pune în evidență o mișcare inversă, în cadrul căreia semnul poetic se emancipează de semnele motivate, evoluind către o simbolicitate din ce în ce mai accentuată. Dar desprinzându-se de semnele iconice și de cele indiciale (semne care, cum am arătat, câștigă în schimb teren în *LS*), *LP* devine din ce în ce mai puțin explicabil prin prezența figurilor de tip metaforic sau metonimic, figuri care constituie obiectul principal al celor mai multe analize de texte poetice. Se conturează astfel o criză a tehnicilor de investigație poetică, a cărei rezolvare nu va putea fi obținută fără ajutorul semioticii.

Opozițiile (14), (23), (24), (9), (16), (32), (4), (5), (6), (7), (26), (27), (28), (12), (13), (17), (18), (19), (40), (41), (42) au fost argumentate chiar în această ordine în primul nostru articol din 1970 asupra celor doi poli ai limbajului uman; opozițiile (20), (37), (31), (11), (30), (2), (46), (47), în cel de-al doilea articol din 1970, iar (25), (15) și, din nou (40), (41) și (42) în cel de-al treilea articol din 1970. Într-o formă puțin diferită, opoziția (22) a fost indicată de Leonard Bloomfield (*Linguistic aspects of science*, 1939). Ar trebui poate s-o completăm cu observația că aspectul grafic este, pentru *LP*, mult mai important decât cel sonor pentru *LS*. Poezia comportă o organizare poli-dimensională (în versuri, strofe etc.) și, uneori, o scriere spațială (Apollinaire, poezia concretă, poezia spațială) aceste fenomene vizuale neputînd fi echivalate în structuri auditive. Cîteva cuvinte despre opoziția (39). Sistemele formale (începînd cu Hilbert) constituie un mod de a se investiga structura teoremelor, adică a secvențelor corect formate (din punct de vedere logic). Începînd cu Chomsky, sisteme formale de tipul sistemelor combinatorii și al anumitor tipuri de automate sînt utilizate în investigarea și generarea secvențelor corect formate din punct de vedere gramatical. Însă corectitudinea este relativă. O secvență e corectă în raport cu un anumit mecanism generativ. Un anumit grad de corectitudine este important ca termen convențional de referință, în investigarea comparativă a diferitelor secvențe care nu sînt corecte, tot așa cum alegerea unui punct-origine și a unei unități de măsură este necesară atunci cînd vrem să comparăm pozițiile relative ale punctelor pe o dreaptă. Tocmai acesta este rolul sistemelor formale în studiul limbajului poetic, unde diferite tipuri de conotații introduc diferite niveluri de semiadevăr

și de semigramaticalitate (oposițiile (37) și (38)), prin secvențe care se abat de la corectitudinea aleasă ca termen de referință. Aceasta este, în esență, problema dificilă a măsurării diferitelor grade de conotativitate pe care am încercat s-o rezolvăm în capitolele V și VII din *Poetica matematică*.

Unii autori apără opoziția (46). Ea își are probabil originea într-un cunoscut principiu, conform căruia poezia rezultă dintr-o așteptare frustrată, care implică o creștere a nedeterminării mesajului estetic. Lucrurile se petrec într-adevăr așa, dacă avem în vedere conotațiile deosebit de îndrăznețe pe care le întâlnim în poezia modernă, dar acesta este numai un aspect al chestiunii. Există și o altă tendință, care acționează într-un sens opus, tendința de a micșora nedeterminarea mesajului poetic, prin introducerea unei organizări globale riguroase. Astfel, un poem este rezultatul unui proces alcătuit din două niveluri: la primul nivel avem un mare număr de dezordini locale (în raport cu ordinea limbajului cotidian), care implică o creștere a nedeterminării; la al doilea nivel întâlnim o ordine de gradul al doilea, o ordine pur globală, care creează coerența magică a întregului text și are ca rezultat o micșorare a nedeterminării. Aceste două tendințe contradictorii acționează, cu diferite intensități, în orice text poetic și nu se poate stabili nici o regulă generală asupra rezultatului lor final.

Dacă opoziția (46) eșuează, mai adecvată ni se pare opoziția (47). Energia informațională (în sensul lui Onicescu, „Comptes rendus de l'Acad. Sci. Paris”, 1966) este corelată cu entropia informațională cu ajutorul unei teoreme care stabilește, între altele, analogul lingvistic al celui de-al doilea principiu al termodinamicii. Însă acest analog exprimă o orientare, o funcție a textului, numai atunci când textul este un scop în sine, așa cum se întâmplă în discursul poetic.

Opoziția (48) marchează una dintre cele mai adânci deosebiri dintre *LS* și *LP*. Natura foarte cuantificată a semanticii științifice implică structura ei logico-algebrică. Cu totul alta este situația semanticii poetice. Ea nu poate fi descrisă în termeni de distanță, ci numai de vecinătate. Acest lucru îl vom discuta ceva mai jos.

Opoziția (49) este o rafinare a opoziției (45), dar trebuie să observăm că termenul „context” are în (45) alt înțeles

decît în (49), deoarece în (45) este avut în vedere doar contextul extralingvistic.

Din opozițiile de mai sus rezultă nu numai deosebirile, dar și numeroasele asemănări dintre *LS* și *LP*, asemănări datorite faptului că ele sînt, amîndouă, limbaje de căutare, de creație: utilizarea limbilor naturale, densitate mare, ambiguitate, stereotipie, utilizarea figurilor metaforice și metonimice, utilizarea sistemelor formale în investigarea lor, relație sistematică între distanța paradigmatică și cea sintagmatică, structurare matematică a semanticii, existența unei creativități sub forma unei mulțimi finite de reguli. Această bază comună mărește interesul opozițiilor dintre *LS* și *LP*. Este interesant faptul că încă în 1929 analogia dintre artă și matematică a făcut obiectul unui eseu adînc al lui S. Buchanan (*Poetry and Mathematics*, The John Day Company, New York), pe care se pare că Servien nu l-a cunoscut, dar nici nu a fost cunoscut de către acesta.

Servien formulează și alte opoziții, cum ar fi existența-nonexistența frazelor contrare, posibilitatea-imposibilitatea de a rezuma un text, prezența-absența tendinței către cifre, sărăcia-bogăția vocabularului și sintaxei. Prima dintre aceste opoziții este înrudită cu (37), a doua cu (23), a treia este pur și simplu falsă, a patra la fel (Servien pretinde că optativul nu apare în *LS*; însă textul unui raționament prin reducere la absurd introduce în mod sistematic modul optativ). Să mai observăm că în treacăt sînt formulate de către Servien și opozițiile (4), (5), (6), (7), (27). De o deosebită acuitate ni se pare observația lui Servien conform căreia unicitatea sensului unei fraze din *LS* este un corolar al sinonimiei infinite din *LS* (pentru toate acestea a se vedea *Le langage des sciences*, 1931); este de observat că Servien nu utilizează termenii „sinonimie” și „omonimie”, ci vorbește despre *LS* ca despre „l'ensemble des phrases qui admettent des équivalentes”, însă sîntem încredințați că intuiția sa completa „des équivalentes en quantité infinie”.

De mai multe ori, Servien pretinde a fi formulat „la première loi générale que l'on connaisse en esthétique” și care constă în faptul că toate obiectele ritmate, în muzică, în poezie sau proză, dacă sînt transcrise într-o notație numerică (după Servien, fapt totdeauna posibil), numerele astfel obținute se distribuie totdeauna după o lege simplă

(lege care variază de la caz la caz) (*Esthétique*, p.91 și p.93). Am reprodus chiar cuvintele lui Servien: „loi simple”. În cazul obiectelor exprimate prin vorbire, Servien are în vedere aici șirul de numere obținut, așa cum am mai arătat, prin considerarea numărului de silabe pînă la prima silabă accentuată (inclusiv), apoi a numărului de silabe situate după prima silabă accentuată, dar nu după a doua silabă accentuată ș.a.m.d. Procedura prin care se obține șirul numeric asociat unei compoziții muzicale este pe larg discutată de Servien, în cadrul problemei mai vaste a recunoașterii temelor. Această procedură constă în reprezentarea fiecărui contur melodic prin două rînduri de cifre. Unul ai cărui termeni reprezintă succesiunea intervalelor care alcătuiesc conturul, aceste intervale fiind măsurate în semitonuri temperate. Putem conveni să reprezentăm prin cifre subliniate intervalele descendente. Al doilea rînd de cifre va fi cel al duratelor notelor succesive, luîndu-se ca unitate durata notei celei mai scurte. Putem conveni să punem o bară deasupra cifrelor care exprimă durate de note accentuate. Procedînd la analiza temelor lui Tristan și Parsifal, Servien, pentru a nu complica scrierea, se mulțumește să ia în considerare doar două tipuri de accente: cele mai tari și cele mai slabe (de exemplu, accentul primar și accentul secundar al unei măsuri de patru timpi). Cu ajutorul celor două șiruri numerice, Servien abordează problema transformărilor temelor wagneriene (*Esthétique*, capitolul 20).

Este important de observat că întreaga teorie a ritmului este, la Servien, o proiecție a ideii fundamentale a esteticii sale, privind folosirea celor două limbaje *LS* și *LP*. Servien spune că ritmul este periodicitatea sesizată („périodicité perçue”), adică sesizată, simțită de către „cel care alege”, dar studiată de către „cel care observă”, deoarece acesta din urmă explicitează tipul de periodicitate care stă la baza unei structuri ritmice. În cazul temelor wagneriene, „cel care alege” este Lavignac (*Voyage artistique à Bayreuth*), el este cel care indică transformările care reiau aceeași temă.

Dar ce este acea „lege simplă” la care Servien revine atît de insistent, cînd se referă la structura ritmică a obiectelor estetice? Astăzi, această formulare apare puțin naivă, dar ea este simptomatică pentru intuiția sigură a lui Servien. Prin „lege simplă” trebuie probabil să înțelegem

o regulă simplă de repetiție, o regulă care se exprimă printr-o formulă pregnantă de trecere de la un termen al șirului la termenul următor. O astfel de formulă (care nu va fi unică, ci va depinde de lectură, de receptor) va genera un șir infinit, va defini deci o prelungire infinită a obiectului estetic. Recunoaștem aici, în germene, ideea de gramatică generativă a operei. Expresia „lege simplă” este oarecum pleonastică. Prin simplul fapt că succesiunea numerică este guvernată de o lege se introduce în desfășurarea ei o anumită simplitate. S-ar putea eventual măsura această simplitate, deci spune că o lege este mai simplă decât alta, dar măsura acestei simplități n-ar mai fi deloc ... simplă.

O altă intuiție prin care Servien își devansează timpul este aceea a restricțiilor care guvernează opera de artă. Vorbind despre mișcarea de libertate și despre mișcarea de constrângere care acționează într-o operă, Servien face o observație de o deosebită acuitate, în spiritul celor mai recente rezultate în ceea ce privește modelarea matematică în estetică (*Esthétique*, p.121): „... un peintre est prisonnier d'une certaine technique ... mais le fait de répéter cette technique, le fait qu'un Rubens peint si souvent d'une façon qui est techniquement la même, révèle combien la part du mouvement libre est moindre qu'on ne le croirait d'abord”. Se află aici anticipate numeroasele restricții de ordin combinator sau statistic, informațional sau psihologic pe care cercetarea din ultimele decenii a reușit să le explice (legea lui Zipf, proprietatea de proiectivitate sintactică, proprietatea lui Tesnière de unicitate a regentului, proprietatea lui Yngve asupra lungimii structurilor regressive etc.). O altă intuiție interesantă, care avea să fie și ea confirmată ulterior, prin cercetările lui I. Xenakis și colaborarea acestuia cu Le Corbusier, este aceea privind legătura profundă a muzicii cu arhitectura (*Esthétique*, p.150).

Fără îndoială, se pot găsi destule observații în textele lui Servien care nu au fost validate de dezvoltarea ulterioară a științei. Unele dintre ele au fost semnalate mai sus, la ele putem adăuga altele. Astfel, o exagerare evidentă este plasarea globală a criticii plastice în categoria celor care nici nu-s în stare să vadă cu ochii lor, nici nu sînt capabili să urmeze un sfat bun, o sugestie a altuia, mai competent. (*Esthétique*, p.112). Există apoi o repulsie față

de utilizarea aparatelor, a mașinilor în investigarea limbajului. Dar tocmai această utilizare a adus în actualitate multe din ideile sale. Servien dedică pagini deosebit de interesante problemelor de stil în *LS*, cu referire specială la stilul memoriilor de matematică ale lui Poincaré, Hermite, Riemann (*Le langage des sciences*, pp.265—270). Aici, el pledează pentru stilul textelor autentice, care au condus la marile rezultate matematice și îi reproșează lui Poincaré faptul de a fi rescris, în cadrul euclidian, pentru public, ceea ce el a parcurs de fapt în cadrul lobacevskian (H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsians*, în vol.2 al operelor), înlocuind astfel calea simplă și „regească” cu una mai complicată, mai puțin naturală (loc.cit., p.114; a se vedea și H. Poincaré, *Science et méthode*, p.51). Servien deplînge faptul că lectura textelor autentice este înlocuită de multe ori cu studiul unor manuale și tratate care, căutînd să fie sistematice, încetează să mai fie semnificative din punctul de vedere al modului în care rezultatele au fost descoperite. Ne exprimăm totuși mirarea în fața următorului text: „... il est curieux de voir que les traités et les cours sont partout, alors que les textes capitaux de Cauchy, Weierstrass, ne se trouvent que dans quelques bibliothèques ...”. Înțelegem necesitatea, pentru un matematician, de a merge la reviste originale, pentru a urmări evoluția cercetării matematice *la zi*, dar nu vedem cum s-ar putea aplica aceeași metodă în ceea ce privește matematica clasică. Ar fi chiar dăunător să cerem unui student de azi să învețe teoremele lui Cauchy și Weierstrass după memoriile originale ale acestora, în loc să ia cunoștință cu ele într-un context al matematicii actuale, din manuale sau tratate adecvate. (În afară de cazul în care studentul în cauză este interesat în probleme de istoria științei.) Așa cum chiar Servien a observat, în *LS* este posibilă rezumarea; există un proces de integrare a teoriilor vechi în cele noi, proces fără de care știința nu s-ar mai putea dezvolta.

Ceea ce prezintă importanță este faptul că aceste greșeli rămîn simple detalii, care nu contaminatează elaborările fundamentale ale operei lui Servien. Așa cum el observă (*Esthétique*, p.116) că Egiptul avea practica teoremei lui Pitagora mult înainte ca spiritul grec s-o fi degajat și analizat în mod explicit, putem spune că Servien a practicat multe modalități contemporane ale gândirii științifice și, chiar dacă nu le-a cristalizat în forma lor de astăzi,

le-a schițat cu o intuiție sigură. Servien nu a căzut în greșeala — pe care și azi o întâlnim la mulți cercetători — de a crede că se poate defini poezia, că se poate obține, din examinarea unor opoziții între *LS* și *LP*, o caracterizare a limbajului poetic; o echivalare a cuvântului „poezie” în termeni de *LS* (*Esthétique*, p.24). De aici și prudența necesară în aprecierea finalității unei estetici ca aceea pe care o preconizează. Reliefînd, cu referire la Chateaubriand, o nouă formulă, a randamentului liric, sub forma unei noi proporții între durată efortul de lectură și densitatea lirică obținută, Servien adaugă imediat că, așa cum fiziologia și chimia n-au reușit încă să construiască nici măcar cea mai simplă celulă vie, obiectul unei științe a poeziei nu este acela de a ne învăța să construim, prin mijloace științifice, o poezie vie (*Esthétique*, pp.129—130). Comparație fericită — adăugăm noi — deoarece în direcția obținerii sintetice a unei celule vii s-au făcut totuși, între timp, cîțiva pași, după cum nici utilizarea mijloacelor științifice în creația artistică nu mai este considerată azi o calamitate, viziunea contemporană în acest domeniu fiind mult mai complexă și mai nuanțată.

Am accentuat mai sus meritul lui Servien ca precursor al folosirii modelelor în estetică. Vrem acum să întregim acest merit, observînd că el a intuit importanța metodologică a modelului nu doar ca analog al obiectului, dar și ca opozant în raport cu obiectul. Într-adevăr, el a argumentat pe larg necesitatea de a putea mima fenomenele din *LP* în termenii unui limbaj *de o altă natură*, deoarece numai pe această cale indirectă va putea *LP* beneficia de roadele unor metode care nu sînt compatibile cu natura sa. „Cel care alege” are nevoie de ajutorul „celui care observă”.

Servien a văzut în teoria ritmului o bază comună pentru toate artele și a dezvoltat, în acest sens, numeroase analize de o deosebită acuitate, privind limbajul muzical și limbajul plastic. Este deci necesar să ne punem problema posibilităților de extindere a opozițiilor studiate, de la *LP* la alte limbaje artistice. Vor fi deci proprietăți ale limbajului artistic (*LA*) acelea care aparțin oricărui tip de *LA* (deci *LP* este un caz particular de *LA*). Opozițiile 1—8, 11—13, 15, 17, 19—21, 23—27, 29—30, 32—33, 36—39, 43—46, 48—49 nu au nevoie de nici o explicație suplimentară; ele rămîn valabile și atunci cînd înlocuim *LP* prin *LA*. Alte opoziții însă își pierd sensul la această înlocuire

sau capătă un sens care urmează abia să fie clarificat. Astfel sînt: opozițiile 9 și 10, dependente de ceea ce s-ar putea înțelege prin *natural* și prin *artificial* în pictură și în muzică, de exemplu; opoziția 14, deoarece nu există un nume muzical sau pictural al obiectelor, iar sugestia este uneori confundată, în muzică sau pictură, cu utilizarea semnelor simbolice (nemotivate), iar opoziția 14 este înlocuită cu 44. Și opoziția 16 își pierde sensul, deoarece nu este clar cu ce fel de traducere am putea avea de-a face în pictură, de exemplu. Într-o situație similară se află și opoziția 18, deoarece nu există o structură sonoră a picturii. Pentru un motiv analog trebuie să abandonăm și opoziția 22. În pictură, expresia este de multe ori tot atât de continuă ca și semantica, fapt care invalidează opoziția 28. Este foarte greu, în pictură sau în muzică, să distingem între o semnificație de bază și o semnificație secundară, deoarece nu există aici un dicționar care ar putea fi luat ca referință; în felul acesta, opoziția 31 nu mai are sens. Nu știm nici ce s-ar putea înțelege, în muzică sau pictură, prin „termen neexpresiv” sau prin „limbaj cotidian”, deci este nevoie de o cercetare ulterioară pentru a clarifica situația opozițiilor 34 și 35. Concepte ca „distanța paradigmatică” și „distanța sintagmatică” presupun un caracter liniar și discret al expresiei artistice, condiție care nu este satisfăcută în artele vizuale. Putem spera că teoria recentă a gramaticilor picturale va aduce o oarecare lumină în această privință, astfel încît opozițiile 40, 41, 42 și 47 vor fi întrucîtva clarificate. O situație similară o prezintă opozițiile 50, 51 și 52.

Vom mai adăuga, pentru întreaga discuție relativă la statutul limbajelor *LS* și *LP*, că natura lor ideală nu se referă la aspectul lor axiologic, ci la forma lor abstractă. Mallarmé este mai apropiat de *LP* decît Apollinaire, fără a fi mai mare decît acesta din urmă (sau, dacă este, nu pentru acest motiv).

*

Să trecem acum la prezentarea modului în care ideile lui Servien au folosit ca punct de plecare pentru formalizarea semanticii din *LS* și din *LP*. Va trebui să amintim mai întîi unele noțiuni și rezultate din 1968, republicate în capitolul V din *Poetica matematică*.

Fie V o mulțime finită și nevidă numită *vocabular*. Elementele din V se numesc *cuvinte*. Orice șir finit de cuvinte (diferite sau nu două câte două) este o *frază pe V* și se notează $a_1 a_2 \dots a_n$. Numărul n se numește *lungimea frazei*, iar a_i este *termenul de rang i* . Pentru comoditate, se consideră și fraza nulă, notată cu ω , a cărei lungime este prin definiție egală cu zero și care este fără efect în operația de compunere a frazelor. Numim *limbaj pe V* orice colecție de fraze pe V . Îl notăm $\langle V, L \rangle$ sau, pur și simplu, L . Totalitatea frazelor pe V constituie *limbajul universal*; se arată ușor că el este infinit, dar numărabil. De aici rezultă că orice limbaj este finit sau numărabil.

Fie \mathcal{S} o mulțime de elemente numite *semnificații*. Tripletul $\langle V, L, \mathcal{S} \rangle$ constituie un *suport biplan*. Orice relație binară ρ definită în L și cu valori în \mathcal{S} constituie, prin definiție, o *structură semantică pe $\langle V, L, \mathcal{S} \rangle$* . Sistemul de obiecte $\langle V, L, \mathcal{S}, \rho \rangle$ constituie un *limbaj cu structură semantică* sau, pur și simplu, un *limbaj semantic*. Într-un astfel de limbaj, două fraze x și y din L sînt *sinonime* dacă $\rho(x) \cap \rho(y) \neq \emptyset$. Numărul cardinal al intersecției din primul membru se numește *ordinul de sinonimie* al perechii de fraze (x, y) . Dacă x și y sînt sinonime, dar $\rho(x) \neq \rho(y)$, spunem că x și y sînt *parțial sinonime*. Dacă $\rho(x) = \rho(y)$, avem *sinonimie totală*. *Indicele de sinonimie* al unei fraze x din L este numărul cardinal $i(x)$ al mulțimii obținute prin reunirea mulțimilor $\rho^{-1}(s)$ cînd s parcurge pe $\rho(x)$. *Indicele de omonimie* al lui x este numărul cardinal al mulțimii $\rho(x)$. Două semnificații s și t din \mathcal{S} sînt *omonime* dacă $\rho^{-1}(s) \cap \rho^{-1}(t) \neq \emptyset$. Numărul cardinal al mulțimii din primul membru este *ordinul de omonimie* al perechii (s, t) . Două semnificații omonime s și t sînt *parțial omonime* dacă $\rho^{-1}(s) \neq \rho^{-1}(t)$, *total omonime* dacă $\rho^{-1}(s) = \rho^{-1}(t)$. *Indicele de omonimie al unei semnificații s* este numărul cardinal al reuniunii mulțimilor $\rho(x)$, cînd x parcurge pe $\rho^{-1}(s)$. *Indicele de sinonimie al unei semnificații s* este numărul cardinal al mulțimii $\rho^{-1}(s)$.

Numim *limbaj fără omonimie* orice limbaj semantic $\langle V, L, \mathcal{S}, \rho \rangle$ cu proprietatea că, pentru orice x din L , mulțimea $\rho(x)$ conține cel mult un element. În general, mulțimea \mathcal{S} poate fi și nenumărabilă. Se poate arăta însă că într-un limbaj fără omonimie semnificațiile s pentru care $\rho^{-1}(s)$ nu este vidă formează o mulțime cel mult numărabilă.

Vom spune că un limbaj fără omonimie este un *limbaj științific* dacă relația ρ este definită pentru orice frază din L iar mulțimea $\rho^{-1}(s)$ este infinită oricare ar fi semnificația s din \mathcal{S} pentru care $\rho^{-1}(s)$ este nevidă. Se constată că într-un limbaj științific relația ρ este o aplicație a lui L în \mathcal{S} ; o vom nota cu f . Se vede imediat că un limbaj semantic este un limbaj științific dacă și numai dacă el este de forma $\langle V, L, \mathcal{S}, f \rangle$, unde f este o aplicație a lui L în \mathcal{S} , iar mulțimile de nivel nevide ale lui f sînt toate infinite (obligatoriu numărabile). Putem reformula ultimul rezultat, astfel: Un limbaj lipsit de omonimie este un limbaj științific dacă și numai dacă fiecare frază din L are indicele de sinonimie egal cu infinit. Se mai arată că, fiind dat un suport biplan $\langle V, L, \mathcal{S} \rangle$, o condiție necesară și suficientă pentru ca să existe o funcție $f: L \rightarrow \mathcal{S}$ pentru care $\langle V, L, \mathcal{S}, f \rangle$ este un limbaj științific este ca L să fie infinit. În același timp se arată că dacă L și \mathcal{S} sînt infinite, atunci există o funcție $f: L \rightarrow \mathcal{S}$ care ia o infinitate de valori și astfel încît $\langle V, L, \mathcal{S}, f \rangle$ este un limbaj științific.

Un limbaj semantic este *lipsit de sinonimie* dacă, oricare ar fi frazele x și y , $x \neq y$, $\rho(x)$ și $\rho(y)$ nu au elemente comune. Se numește *limbaj poetic* orice limbaj lipsit de sinonimie, în care indicele de omonimie al fiecărei fraze este de puterea continuului.

Victor Raischi („Studii și cercetări matematice”, vol. 26, 1974, no.1) a introdus, într-un limbaj semantic, operatorii γ și γ^{-1} astfel: γ este o aplicație a lui 2^L în $2^{\mathcal{S}}$, astfel încît $\gamma(x) = \rho(x)$ pentru orice x în L , iar $\gamma(X)$ este intersecția mulțimilor $\gamma(x)$ cînd x parcurge colecția nevidă X de fraze; γ^{-1} este o aplicație a lui $2^{\mathcal{S}}$ în 2^L pentru care $\gamma^{-1}(S)$ este intersecția mulțimilor $\rho^{-1}(s)$ cînd s parcurge mulțimea nevidă S de semnificații. Se arată că γ și γ^{-1} formează o conexiune Galois. Cu ajutorul lui γ și γ^{-1} se definesc două relații de dominare, după cum urmează. Fiind date două părți nevide X și Y ale lui L , V . Raischi spune că X L -domină pe Y dacă $\rho(X) \subseteq \gamma(Y)$. Fiind date două părți nevide S și T ale lui \mathcal{S} , S \mathcal{S} -domină pe T dacă $\rho^{-1}(S) \subseteq \gamma^{-1}(T)$. Se pot transpune la aceste relații de dominare numeroase proprietăți și noțiuni studiate în cartea noastră *Lingvistica matematică* în cazul unei relații de dominare care este o particularizare a relațiilor de L -dominare și de \mathcal{S} -dominare.

Limbajele semantice pot fi de două feluri: ambigue sau neambigue, după cum ρ nu este sau este o aplicație a lui L în \mathcal{S} . Să punem $J(S) = \gamma(\gamma^{-1}(S))$ pentru orice mulțime nevidă S de semnificații. Raischi arată că un limbaj semantic este neambiguu dacă și numai dacă, pentru orice semnificație s , avem $J(s) = \rho(\rho^{-1}(s)) = \{s\}$. Dintre limbajele semantice se detașează clasa limbajelor cvasiambigue, caracterizate prin următoarea proprietate: Pentru orice pereche (x, y) de fraze din L , x și y sînt sau total sinonime sau nesinonime. În ceea ce privește limbajele ambigue, ele pot fi de tipul I sau de tipul II. Să punem $I(X) = \gamma^{-1}(\gamma(X))$ pentru orice parte X nevidă a lui L . Un limbaj semantic ambiguu de tipul I se caracterizează prin proprietatea $I(x) = \rho^{-1}(\rho(x)) = \{x\}$ pentru orice x din L , deci apartenența la tipul I este echivalentă cu absența sinonimiei. Rezultă că un limbaj semantic ambiguu este de tipul I dacă este un limbaj cvasiambiguu. Un limbaj semantic ambiguu este de tipul II dacă nici relația ρ , nici relația ρ^{-1} nu sînt funcții.

În orice limbaj științific: $J(s) = \{s\}$ pentru orice s din \mathcal{S} ; mulțimile de nivel ale aplicației ρ sînt în același timp clase de distribuție și categorii morfologice în raport cu relația de L -dominare. În orice limbaj poetic: $I(x) = \{x\}$ pentru orice x din L ; mulțimile de nivel ale aplicației ρ^{-1} sînt, în același timp, clase de distribuție și categorii morfologice în raport cu relația de \mathcal{S} -dominare. Opoziția dintre cele două limbaje se realizează la nivelul limbajelor cvasiambigue.

V. Raischi („Studii și cercetări matematice”, vol.26, 1974, no.2) introduce în continuare limbajele semantice de tipul III, definite ca limbaje cvasiambigue în care există cel puțin două fraze sinonime, și limbaje semantice de tipul IV, definite ca limbaje de tipul II care nu sînt cvasiambigue. Limbajele de tipul IV modelează limbile naturale. Unui limbaj de tipul IV i se poate asocia un anumit tip de *limbaj deviant*, sub forma unui limbaj semantic de tipul I (deci de același tip cu limbajul poetic). Se regăsește astfel ideea reprezentării limbajului poetic ca limbaj deviant.

Tot V. Raischi, introduce, în ultima lucrare menționată, o noțiune de distanță d într-un limbaj semantic, noțiune conform căreia: $d(x, y) = 1$, respectiv 0 dacă x și y sînt parțial, respectiv total sinonime; pentru x și y nesinonime avem $d(x, y) = 2$ dacă și numai dacă există o frază z ,

care este parțial sinonimă atît cu x , cît și cu y etc. După cum se observă, este vorba de o distanță care măsoară gradul de abatere de la situația de sinonimie totală. O distanță similară se poate introduce în mulțimea semnificațiilor.

*

Să mai reluăm cîteva noțiuni din *Poetica matematică*. Fie $\langle L, \mathfrak{S}, \rho \rangle$ un limbaj poetic și fie

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n$$

unde \mathfrak{S}_0 este mulțimea semnificațiilor neexprimate, iar $\mathfrak{S}_n = \{s; s \in \mathfrak{S}, \rho(x_n) = s\}$, în timp ce $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Cu excepția eventuală a mulțimii \mathfrak{S}_0 , fiecare mulțime \mathfrak{S}_n este de puterea continuului, deci mulțimea semnificațiilor exprimate într-un limbaj poetic este de puterea continuului.

Pentru a putea distinge între diferitele semnificații ale unei aceleiași fraze, vom asocia unui limbaj poetic o structură nouă, numită *structura de valorificare*. Fie, în acest scop, R mulțimea numerelor reale, N mulțimea numerelor naturale. Mulțimea R trebuie gîndită aici ca mulțimea diferitelor momente — trecute sau viitoare — iar N reprezintă mulțimea indivizilor umani. Structura de valorificare constă într-o aplicație

$$\lambda: \mathfrak{S}^* \rightarrow L \times R \times N,$$

unde $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0$. Aplicația λ poate fi interpretată astfel: Fiecare semnificație s din \mathfrak{S}^* este exprimată de o frază unică x din L și este sesizată de o singură persoană n din N într-un moment t din R bine determinat al existenței sale. Aceasta se exprimă prin egalitatea

$$\lambda(s) = \langle x, t, n \rangle; \quad (2)$$

chiar din interpretarea adoptată, rezultă că trebuie să impunem, în (2), condiția

$$s \in \rho(x). \quad (3)$$

Însă dacă o persoană n a sesizat o dată fraza x — să spunem la momentul t — el o va putea sesiza și la orice moment t' ulterior lui t , dar de fiecare dată cu o altă semnificație s' .

B.C.D. „M. Eminescu” Iași

Așadar, trebuie să admitem că din existența a patru elemente s, x, t și n care satisfac relațiile (2) și (3) rezultă existența unui $t_0 > t$, astfel încît fiecărui t' pentru care $t < t' < t_0$ să-i corespundă o semnificație $s' \in \rho(x)$ cu proprietatea

$$\lambda(s') = \langle x, t', n \rangle \quad (4)$$

și astfel încît

$$t'_1 \neq t'_2 \quad s'_1 \neq s'_2. \quad (5)$$

Rezumînd, putem deci spune că o structură de valorificare asociată unui limbaj poetic este o aplicație de forma (1), care îndeplinește condițiile (3), (4), (5) de îndată ce are loc relația (2).

Să notăm cu $\mathcal{S}(n, x)$ mulțimea semnificațiilor s pentru care există t astfel încît să aibă loc relația (2). Ținînd seamă de condiția (3), rezultă că $\mathcal{S}(n, x) \subseteq \rho(x)$ pentru $n = 1, 2, \dots$, deci mulțimea $\mathcal{S}(n, x)$ nu este de putere superioară continuului. Pe de altă parte, deoarece atît n , cît și x parcurg cîte o mulțime numărabilă și deoarece, în baza aplicației (1), avem

$$\rho(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}(n, x), \quad (6)$$

rezultă (ținînd seamă că $\rho(x)$ este de puterea continuului) că fiecare mulțime $\mathcal{S}(n, x)$ este sau vidă, sau de puterea continuului. Așadar: Fiind dat un limbaj poetic înzestrat cu o structură de valorificare, fiecare mulțime $\mathcal{S}(n, x)$ nevidă este de puterea continuului. Interpretarea acestui rezultat este următoarea: Dacă o persoană sesizează o frază aparținînd limbajului poetic, atunci el o sesizează cu o infinitate de puterea continuului de semnificații.

I. I. Revzin (*On the continuous nature of poetic semantics*, „Poetics”, vol.10, 1974) a criticat faptul că noi deducem continuitatea semanticii poetice exclusiv din faptul că, pentru fiecare cititor în parte, această semantică diferă de la un moment la altul, cu alte cuvinte continuitatea ei este o consecință a continuității parametrului timp. Revzin a arătat că putem evita o reprezentare atît de subiectivă a semanticii poetice. Vom prezenta, în cele ce urmează, ideile sale.

Infinitatea și chiar nenumărabilitatea mulțimii de semnificații poetice pot fi explicate pornind de la structura

internă a discursului poetic. În fapt, după cum observă Revzin, această idee este implicit conținută în diferite părți din *Poetica matematică*, unde noi accentuăm organizarea riguroasă a textului poetic (construcția singulară a acestuia — pentru a utiliza limbajul formalistilor ruși). Această organizare conduce la o situație în care fiecare cuvânt al discursului poetic poate dobândi o independență specifică și, în același timp, să adere la anumite legături cu alte cuvinte, legături care-i conturează înțelesul. Discursul poetic este deci dominat de tendințe contradictorii. În cadrul acestora, relațiile semantice pot să fie sau să nu fie în concordanță cu cele sintactice. În principiu, orice marcă semantică a unui cuvânt poetic are o completă libertate de combinare cu mărcile semantice ale altor cuvinte. Această libertate nelimitată conduce la diferite fenomene de amalgamare semantică și transpoziție semantică.

Într-un mod mai riguros, situația menționată poate fi descrisă în modul următor. Să considerăm un discurs poetic ale cărui elemente (de exemplu, cuvinte) sînt reprezentate în raport cu un număr de k mărci semantice, care pot fi combinate în diferite moduri. După cum se știe, numărul combinațiilor posibile cu aceste mărci este egal cu 2^k , deci numărul semnificațiilor teoretic posibile ale discursului poetic considerat este egal cu 2^k . De obicei, aceste mărci semantice sînt distribuite pe diferite niveluri de generalitate. De exemplu, în raport cu exemplul considerat în fig.V.1, p.160 din *Poetica matematică* avem un prim nivel, cu două mărci, *abstract* și *concret*, un al doilea nivel, cu patru mărci, *conceptual*, *neconceptual*, *terestru*, *non-terestru*, un al treilea nivel, cu opt mărci (printre care *senzorial*, *nesenzorial*, *animat*, *inanimat*), un al patrulea nivel, cu $2^4 = 16$ mărci (printre care: *uman*, *non-uman*, *uniregn*, *pluriregn*) și un al cincilea nivel, cu $2^5 = 32$ mărci (printre care: *vegetal* și *mineral*). Fiecare nivel conține toate mărcile semantice ale nivelurilor precedente, însă gradul de ramificare, adică numărul nivelurilor, într-o astfel de clasificare a mărcilor semantice este practic nelimitat. Rezultă că mulțimea mărcilor semantice asociate unui discurs poetic este infinită, dar numărabilă. Însă mulțimea părților unei mulțimi numărabile nu este numărabilă; dacă admitem ipoteza continuului, ea are puterea continuului. Ținînd seamă de independența ipotezei continuului, obținem două variante, după cum acceptăm sau un această ipoteză. Alegem, în cele

ce urmează, prima variantă. Deci numărul cardinal al mulțimii de combinații posibile de mărci semantice este, într-un discurs poetic, de puterea continuului. De aici rezultă că mulțimea semnificațiilor posibile ale unui discurs poetic este de puterea continuului.

După cum observă Revzin, nucleul argumentării de mai sus există în cartea noastră, de exemplu atunci când scriem (p.139): „Trebuie să ne amintim însă că mulțimea semnificațiilor poetice este nenumărabilă și, deci, mulțimea categoriilor semantice corespunzătoare ar trebui să fie infinită. Este adevărat că și mulțimea semnificațiilor exprimabile într-un limbaj științific este infinită, însă aici este vorba de o infinitate numărabilă, a cărei descriere cu ajutorul unei colecții finite de categorii gramaticale nu este lipsită de plauzibilitate”. Însă noi nu am tras consecințele acestei situații.

Deosebirea esențială între argumentarea noastră și cea a lui Revzin constă în faptul că noi (urmînd ideile lui Servien) deducem natura continuă a semanticii poetice exclusiv din modul singular în care se realizează percepția poeziei, în timp ce Revzin o deduce din principiile interne de organizare ale discursului poetic. Din acest rezultat, Revzin obține un altul, care vine în întîmpinarea unor intuiții cunoscute: limbajul poetic este construit împotriva principiului aditivității (conform căruia semnificația unui discurs este „suma” semnificațiilor componentelor sale), deoarece orice combinație formată cu mărcile semantice de bază constituie o semnificație potențială a discursului. Nu putem însă fi de acord cu Revzin atunci când contrapune, din acest punct de vedere, limbajul poetic limbajului științific, pretinzînd că acesta din urmă este construit după principiul aditivității. (O idee similară fusese susținută anterior de către lingvistul american Paul Garvin). Nu este greu de văzut că chiar în componenta artificială (ca să nu mai vorbim de cea naturală) a limbajului matematic abundă „expresiile idiomatice”, adică exact acele expresii a căror semnificație nu poate fi obținută pe cale sintactică, adică nu este rezultatul compunerii semnificațiilor termenilor care le alcătuiesc. Este oare semnificația expresiei

$$\int_a^b f(x)dx$$

rezultatul „compunerii” semnificațiilor lui $\int, f(x)$ și dx ?

Orice matematician știe că răspunsul este negativ.

Vom trece acum la studiul structurii topologice a semnificației poetice. Abia acum opoziția discret-continuu, formulată de Servien într-un mod parțial, dar căreia i s-au găsit ulterior mai multe surse (așa cum am văzut mai sus) își va dezvălui semnificațiile ei mai profunde. Vom indica două moduri de a introduce o topologie în \mathcal{S} , unul bazat pe relația operă-cititor (în spiritul ideilor lui Servien), altul, indicat de Revzin, bazat pe structura imanentă a textului poetic.

Cu ajutorul structurii de valorificare λ , vom defini o familie \mathcal{F} de părți ale lui \mathcal{S}^* , după cum urmează: $E \in \mathcal{F}$ dacă există un număr natural n_1 astfel încât, pentru orice $n > n_1$, mulțimea $\mathcal{S}(n) - E$ să fie cel mult numărabilă. Semnificația familiei \mathcal{F} este următoarea. O mulțime E de semnificații aparține lui \mathcal{F} dacă, exceptând cel mult o mulțime finită de persoane (cele pentru care $n \leq n_1$), E conține „aproape toate” semnificațiile sesizate de o persoană oarecare. Aici, prin „aproape toate” înțelegem „cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile”. Se demonstrează ușor că orice supramulțime a unei mulțimi din \mathcal{F} aparține de asemenea lui \mathcal{F} , iar intersecția a două mulțimi din \mathcal{F} aparține și ea lui \mathcal{F} . Vom spune că o structură de valorificare asociată unui limbaj poetic este completă (respectiv semicompletă) dacă $\mathcal{S}(n) \neq \emptyset$ pentru orice n natural (respectiv $\mathcal{S}(n) \neq \emptyset$ pentru o infinitate de valori ale lui n). Aici am notat

$$\mathcal{S}(n) = \bigcup_{x \in L} \mathcal{S}(n, x).$$

Nu este greu de demonstrat că într-un limbaj poetic cu structură de valorificare semicompletă familia \mathcal{F} constituie un filtru asupra lui \mathcal{S}^* (este suficient, pentru aceasta, de observat că partea vidă a lui \mathcal{S}^* nu aparține lui \mathcal{F}). De aici rezultă că, adăugând la \mathcal{F} partea vidă a lui \mathcal{S} , obținem o topologie în \mathcal{S}^* . Această topologie este legată de structura de valorificare prin câteva proprietăți: Spațiul topologic obținut este conex dacă și numai dacă structura de valorificare este semicompletă; este un spațiu Hausdorff dacă și numai dacă topologia spațiului este chiar topologia discretă în \mathcal{S}^* . Dacă spațiul topologic este un spațiu Haus-

dorff, atunci structura de valorificare nu este semicompletă.

Revzin a arătat că metoda noastră de a topologiza mulțimea \mathfrak{S}^* poate fi adaptată ușor la punctul său de vedere asupra continuității semanticii poetice (s-a folosit aici și o sugestie a lui Miroslav Novotný, care a corectat o greșală din varianta inițială a propunerii lui Revzin). Să notăm cu $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ frazele care alcătuiesc un limbaj poetic și să asociem acestuia o arborescență de mărci semantice cu o infinitate de niveluri. Să notăm cu $\mathfrak{S}(k, x_n)$ mulțimea semnificațiilor frazei x_n din L , în raport cu nivelul de ordinul k al arborescenței. În felul acesta, fiecare semnificație din $\mathfrak{S}(k, x_n)$ apare ca o combinație de mărci semantice situate la nivelul de ordinul k și asociate anumitor termeni ai frazei x_n . Să punem

$$\mathfrak{S}(x_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{S}(k, x_n),$$

deci $\mathfrak{S}(x_n)$ este mulțimea tuturor semnificațiilor posibile ale lui x_n . Nu rămîne acum decît să înlocuim în construcția noastră de mai sus pe $\mathfrak{S}(n)$ prin $\mathfrak{S}(x_n)$. Obținem astfel o topologie naturală, asociată structurii interne a limbajului poetic, în contrast cu topologia de mai sus, care este asociată relațiilor dintre limbajul poetic și posibیلی săi receptori. Într-adevăr, în reprezentarea anterioară, mulțimea $\{1, 2, \dots, k, \dots\}$ este mulțimea receptorilor posibili, $\mathfrak{S}(k; x)$ este mulțimea diferitelor semnificații cu care persoana k sesizează (la diferite momente) fraza x , în timp ce $\mathfrak{S}(k)$ este mulțimea tuturor semnificațiilor poetice sesizate de către k . În reprezentarea de față, lucrurile se schimbă. Vom indica aici, în mod explicit, doar una dintre topologiile posibile. Să punem

$$\mathfrak{S}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}(x_n).$$

Fie \mathfrak{F} o familie de submulțimi ale lui \mathfrak{S}^* , definită în modul următor: $E \in \mathfrak{F}$ dacă există un întreg N pentru care, oricare ar fi $n > N$, diferența $\mathfrak{S}(x_n) - E$ este o mulțime cel mult numărabilă. Reuniunea lui \mathfrak{F} cu mulțimea vidă constituie o topologie în \mathfrak{S}^* . Semnificația acestei topologii

este următoarea. După cum s-a observat mai sus, mulțimea $\mathcal{S}(x_n)$ este de puterea continuului; aceasta înseamnă că orice mulțime E nevidă a topologiei conține aproape toate semnificațiile poetice care sînt suficient de rafinate; mai precis, dacă ignorăm primele N fraze din L , oricare mulțime E a topologiei conține aproape toate semnificațiile limbajului poetic considerat. Amintim că prin „aproape toate” înțelegem „cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile”. Condițiile lingvistice de conexitate se transpun fără nici o dificultate de la topologia noastră la topologia lui Revzin.

Posibilitatea de a ignora primele n fraze din L admite, după Revzin, mai multe interpretări, printre care și următoarea. Se discută uneori dacă universul poetic reprezentat în discursul poetic al unui mare poet P poate fi studiat independent de universurile poetice ale predecesorilor săi. Admițînd că discursurile poetice ale acestor predecesori pot fi interpretate ca primele N fraze în discursul poetic al lui P (sau ca fiind echivalente cu acestea), se obține un răspuns afirmativ la dilema de mai sus.

În toate dezvoltările de mai sus, semnificațiile asociate unei fraze rămîn nediferențiate în ceea ce privește contextul în care această frază este plasată. Am fost, din acest punct de vedere, consecvenți cu Servien, care nu a condus analiza pînă în acel punct în care variabilitatea unei semnificații în raport cu contextul să devină pertinentă. Totuși, opoziția (20) ne atrage atenția asupra caracterului esențial al dependenței semanticii poetice de contexte foarte largi. Acesta este motivul pentru care am propus Liane Popa-Burcă să adapteze modelul anterior la cazul mai complicat al dependenței contextuale. Iată cîteva rezultate obținute în acest sens („Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol.10, 1973, fasc.1), mai întîi pe o cale algebrică, apoi pe o cale topologică.

Un context pe un vocabular V este o pereche ordonată $\langle u, v \rangle$ de fraze pe V . Fie \mathcal{C} mulțimea contextelor pe V și fie L un limbaj pe V . Considerăm o aplicație φ a produsului cartezian $\mathcal{C} \times L$ în mulțimea $\mathfrak{S}(\mathcal{S}^*)$, unde \mathfrak{S} semnifică mulțimea părților, iar \mathcal{S}^* este mulțimea semnificațiilor care pot fi asociate frazelor din L . Un context $\langle u, v \rangle$ este adecvat unei semnificații s din \mathcal{S}^* , în raport cu L , dacă există o frază x în L pentru care semnificația s aparține lui $\varphi(\langle u, v \rangle, x)$. Fiind date două contexte $\langle u, v \rangle$ și $\langle u', v' \rangle$, spunem că avem $\langle u, v \rangle \dashv \langle u', v' \rangle$ dacă

$\mathcal{S}(\langle u, v \rangle) \subseteq \mathcal{S}(\langle u', v' \rangle)$, unde $\mathcal{S}(\langle \alpha, \beta \rangle)$ este mulțimea semnificațiilor pentru care contextul $\langle \alpha, \beta \rangle$ este adecvat. Relația \dashv este reflexivă și tranzitivă. Ea se poate relativiza în raport cu o frază x :

$$\langle u, v \rangle \dashv_x \langle u', v' \rangle$$

dacă $\varphi(\langle u, v \rangle, x) \subseteq \varphi(\langle u', v' \rangle, x)$. Mai departe, fiind dată o familie \mathcal{F} de fraze din L , vom pune

$$\langle u, v \rangle \dashv_{\mathcal{F}} \langle u', v' \rangle$$

dacă relația \dashv are loc în raport cu orice x din \mathcal{F} . Se poate arăta că din faptul că două contexte sînt în relația \dashv rezultă că ele sînt în relația \dashv . Pentru un limbaj L lipsit de sinonimie are loc și reciproca, adică din \dashv rezultă \dashv . În particular deci, pentru un limbaj poetic, cele două relații sînt echivalente.

Relația \dashv se pretează unui studiu de tipul celui dezvoltat în cartea noastră *Linguistica matematică* (1966) relativ la așa-numitele relații de dominare (capitolul IV). Extinzînd această denumire la relația de față, vom spune că o familie \mathcal{C}_1 de contexte domină familia \mathcal{C}_2 dacă orice context din \mathcal{C}_1 domină orice context din \mathcal{C}_2 . Dacă orice context care domină pe \mathcal{C} aparține lui \mathcal{C} , \mathcal{C} este o mulțime inițială. Reuniunea dintre \mathcal{C} și contextele dominate de \mathcal{C} este categoria semantic-contextuală generată de \mathcal{C} ; o notăm cu $G(\mathcal{C})$. În cazul particular în care \mathcal{C} este o clasă de echivalență în raport cu relația de dublă dominare, $G(\mathcal{C})$ este o categorie semantic-contextuală elementară. Indicele de omonimie semantică al unui context este egal, prin definiție, cu numărul de categorii semantic-contextuale elementare care-l conțin.

Pentru a include și componenta contextuală în abordarea topologică a semanticii poetice, L. Popa-Burcă extinde structura de valorificare asociată lui L , definind o aplicație λ a lui \mathcal{S}^* în $L \times R \times N \times \mathcal{C}$, în așa fel încît, pentru orice s din \mathcal{S}^* , $\lambda(s) = \langle x, t, n, \gamma \rangle$, unde s este una dintre semnificațiile frazei x în contextul γ și există un moment $t_0 > t$ pentru care din $t < t' < t_0$ rezultă existența unei semnificații s' pentru care $\lambda(s') = \langle x, t', n, \gamma \rangle$, iar $t'_1 \neq t'_2$ implică $s'_1 \neq s'_2$.

Să notăm cu $\mathcal{S}(n, x, \gamma)$ mulțimea semnificațiilor frazei x , sesizate de către individul n în contextul γ . Din proprietățile lui λ rezultă că $\rho(x)$ — mulțimea semnificațiilor lui x — se obține ca reuniune a mulțimilor $\mathcal{S}(n, x, \gamma)$ când γ parcurge pe \mathcal{C} , iar n parcurge toate numerele naturale. În loc însă să ținem fixă fraza x , putem ține fix individul n , notînd cu $\mathcal{S}(n)$ mulțimea semnificațiilor sesizate de n (mulțime care se va obține ca reuniune a mulțimilor $\mathcal{S}(n, x, \gamma)$ când γ parcurge pe \mathcal{C} , iar x parcurge pe L). Se poate defini acum o topologie în \mathcal{S}^* , imitînd întocmai procedeul din cazul acontextual. Fie τ_1 familia acelor mulțimi E din \mathcal{S}^* , pentru care există un număr natural N , astfel încît, pentru $n > N$, mulțimea $\mathcal{S}(n) - E$ este numărabilă. Adăugînd la τ_1 mulțimea vidă, obținem o topologie τ , ale cărei mulțimi închise sînt foarte „sărace” (fiind cel mult numărabile), în timp ce mulțimile deschise sînt foarte apropiate de mulțimea tuturor semnificațiilor poetice. Defectul acestei topologii stă tocmai în acest fapt, în virtutea căruia mulțimea semnificațiilor sesizate de către un individ după un anumit moment t nu mai poate aparține topologiei τ . Pentru a remedia această situație, se poate defini o nouă topologie, avînd ca suport chiar mulțimea $\mathcal{S}(n, x, \gamma)$ (loc. cit., pp. 60—61).

În prezentarea noastră, semiotica muzicală preconizată de Servien a căzut pe un plan secundar. Dar actualitatea ei nu poate fi trecută cu vederea. Punînd pe primul plan ideea de transformare (a se vedea capitolul 19 din *Estetica* sa), Servien a anticipat numeroase preocupări actuale, dintre care vom menționa pe acelea întreprinse la noi în țară de către Mihai Brediceanu, în ceea ce privește transformările topologice și mecanismele generative în creația muzicală și de către Bogdan Cazimir în legătură cu tratarea uniformă a transformărilor melodice cu ajutorul regulilor generative de tip Lindenmayer (*Sémiologie musicale et linguistique mathématique*, „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol.11, 1974, nr.2, pp.231—238).

Incursiunea de mai sus a fost, credem, suficientă pentru a demonstra cît de mult este contaminată cercetarea actuală în poetica teoretică de gîndirea lui Pius Servien. Modernitatea lui Servien constă în faptul că el a anticipat nu numai ca idee, dar și ca tehnică de investigație, punctul de vedere contemporan conform căruia estetica trebuie să-și elaboreze un metalimbaj cît mai distinct de limbajul

obiect. Dar aceasta a fost doar una dintre direcțiile gândirii sale (pe care totuși o considerăm cea mai importantă). În studiul ritmului (pe care l-am formalizat parțial în *Poetica matematică*), Servien a adus nu doar o definiție aritmetică riguroasă, dar și un ansamblu de observații de detaliu, deosebit de pătrunzătoare (a căror dezvoltare ulterioară poate fi urmărită în investigațiile de finețe efectuate la noi în țară de către Mihai Nasta asupra ritmului în poezia greacă; a se vedea și cercetările Lidiei Sfîrlea, în „Studii de limbă literară și filologie”, Ed. Academiei, 1969). În cercetările sale de filozofia științei, Pius Servien a abordat probleme delicate privind bazele epistemologice ale teoriei probabilităților și ale fizicii moderne (*Sur les fondements des mathématiques*, 1939, *Probabilités et physique*, 1945, *Probabilités et quanta*, 1948). Încă în 1947, marele fizician Erwin Schrödinger și-a exprimat interesul pentru această direcție a cercetărilor lui Servien, cercetări în cadrul cărora se operează distincția dintre „observabile” și „noțiuni matematice”, care ulterior avea să devină frecventă în metodologia științelor speculative.

Inițial urma să intre în cadrul acestei cărți și un capitol consacrat lui Grigore C. Moisil. Între timp, însă, ne-am dat seama că mai avem nevoie de un răgaz pentru a putea evalua semnificația și efectul măcar al câtorva din ideile și rezultatele sale. Sîntem, probabil, încă prea aproape de personalitatea sa umană, științifică și culturală, de amănuntele vieții sale cotidiene, de iubirile și adversitățile care l-au înconjurat, pentru a putea întreprinde analiza lucidă pe care o dorim. Vom încerca, deocamdată, să conturăm aici cîteva aspecte și probleme, cîteva întrebări și ipoteze care vor trebui, credem, să facă ulterior obiectul unor investigații mai profunde.

Una din preocupările constante care ne-au urmărit în această carte a fost aceea de a plasa fiecare personalitate discutată într-o anumită serie culturală sau științifică, de a-i stabili deci predecesorii și continuatorii, atît la noi, cît și pe plan mondial. Născut în Dobrogea, venit ca profesor la București, după un stagiu îndelungat în Moldova, dar cu un arbore genealogic urcînd departe în istoria Năsăudului și a Maramureșului, de unde vine de fapt Grigore C. Moisil? Se plasează, cumva, în seria unor figuri ilustre bine determinate, așa cum G. Călinescu se situează în tradiția care trece prin Cantemir, Hasdeu și Nicolae Iorga? Înzestrat cu o capacitate rară de a înțelege sensul de dezvoltare a lucrurilor, atunci cînd acesta este încă nedeslușit; cu un simț dezvoltat al paradoxului; maestru al contra-argumentării, pe care o practica nu din dorința de a contrazice, ci pentru a scoate în evidență pluralitatea de aspecte și tendințe; ferment capabil să stîrnească adeziunea entuziastă sau dezacordul total, dar niciodată plictiseala și indiferența; generos și deschis în lupta intelectuală; cu o aplecare spre filozofie și visare care nu este străină de stilul de gîndire al profesorului său, Dimitrie Pompeiu; cu un umor uneori sarcastic, alteori binevoitor, de tentă

moldovenească, Gr. C. Moisil pare a fi, în cultura românească, o prezență careia cu greu i s-ar putea găsi spița. Era un maestru al expunerii orale, cu harul argumentației spontane (ne-a mărturisit odată că a învățat să vorbească liber, fiind constrâns la aceasta de faptul că dicțiunea sa devine imposibilă la lectură). O modalitate importantă pe care o practica în expunere era aceea a nuanțării neconținute a accentului. Lucrurile, ideile nu se desfășurau niciodată ca și cum ar fi la fel de importante sau de neimportante. Odată cu ordinea lor liniară se contura și ierarhia lor. Rostea cu o mlădiere unică a glasului o expresie care în matematică revine mereu, ori de câte ori este vorba de un proces cu o infinitate de etape: „Și așa mai încolo...”, „Și așa mai departe...”.

Insistăm asupra acestor date personale ale lui Gr. C. Moisil, deși ele vor fi din ce în ce mai puțin în stare să evoce prezența sa materială de o originalitate puțin obișnuită. Gr. C. Moisil trebuia să fie văzut și auzit, o mare parte din farmecul său stînd în această prezență direct tangibilă, așa cum cuprinderea unui vers nu poate fi despărțită de expresia sa materială. Chiar (sau poate mai ales) în intervențiile sale spontane sau improvizate, Gr. C. Moisil dezvolta o observație pătrunzătoare, care trecea dincolo de teritoriul accesibil simțului comun, pentru a ajunge la adevărurile mai profunde, care de multe ori sînt neverosimile. Ceea ce unora părea un simplu joc de cuvinte era rodul unei gândiri științifice autentice, al unei experiențe umane de o mare complexitate.

Alături de Simion Stoilow, Miron Nicolescu și Gheorghe Vrănceanu, Gr. C. Moisil făcea parte din pleiada de mari profesori matematicieni de care Universitatea din București s-a bucurat începînd cu deceniul al cincilea al secolului nostru; acei distinși profesori care, împreună cu unii străluciți predecesori, aveau să devină marii șefi de școală ai matematicii românești. Gr. C. Moisil a format nu o școală, ci cîteva școli (printre care una de mecanică, una de logică matematică și una de teoria algebrică a mecanismelor automate). Acest lucru se explică prin fecunditatea ideilor sale, prin măiestria cu care știa să prezinte nu o matematică „gata făcută”, ci una care se construia în prezența auditoriului și în care problemele deschise, aspectele susceptibile de a fi ameliorate erau totdeauna subliniate. Gîndirea sa era esențialmente deschisă, în conformitate

cu observația pe care atât de pregnant a formulat-o undeva : „Nici o problemă nu are granițe. Orice răspuns are multe”.

În fiecare domeniu în care a lucrat, Gr. C. Moisil și-a legat numele de o idee, un fapt, o metodă. A intuit importanța logicilor cu mai multe valori, într-o vreme când acestea păreau doar o bizarerie, pentru ca apoi să le găsească aplicații surprinzătoare în tehnică. Punctul de vedere al lui Moisil se racordează cu cel al lui Lotfi Zadeh (creatorul teoriei mulțimilor *fuzzy*), prin aceea că ideea de *fuzzy set* poate fi privită ca o extensiune a unui predicat în logica cu o infinitate de valori, logică față de care logicile cu un număr finit de valori sînt doar niște aproximații. Dealtfel, acest punct de vedere fusese deja schițat de către Moisil în unele articole anterioare. Originalitatea acestui punct de vedere, care reține, din structura conceptelor vagi, nu atât aspectul impreciziei, ci mai mult pe cel al nuanțării, a fost recunoscută de către specialiști, așa cum rezultă și din prefața cărții recente a lui A. Kaufmann consacrată teoriei lui Zadeh și aplicațiilor ei.

Gr. C. Moisil este un pionier al metodelor funcționale în mecanică și în geometria diferențială. Publicarea, de către Editura Academiei, a operei sale matematice, publicare care începe în curînd cu un volum cuprinzînd contribuțiile în domeniul teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale și aplicațiilor ei în geometria diferențială și continuă cu un al doilea volum, în care vor intra contribuțiile în domeniul mecanicii, va facilita reconsiderarea corespunzătoare a meritelor lui Moisil ca deschizător de drumuri în ceea ce privește folosirea metodelor analizei moderne în mecanică și în geometria diferențială.

Dar, probabil că trăsătura specifică dominantă a operei lui Moisil constă în proiectarea unui spirit algebric în cele mai diferite domenii ale matematicii. Numărul mare al lucrărilor sale de analiză nu trebuie să înșele; esența lor este de cele mai multe ori algebrică. Gr. C. Moisil a excelat în dezvoltarea unor ipostaze algebrice a unor fapte importante de analiză. Acest spirit algebric răspîndit în toate lucrările sale (în cele de logică și de mecanisme automate faptul acesta este cu deosebire frapant) conferă operei sale o perfectă unitate, în ciuda extraordinarei ei varietăți tematice.

Chiar într-o analiză atât de succintă ca cea de față, tre-

buie să consemnăm activitatea lui Gr. C. Moisil în domeniul lingvisticii. În primul rînd, să amintim că, alături de prof. Alexandru Rosetti și de prof. Miron Nicolescu, Moisil a militat pentru dezvoltarea preocupărilor de lingvistică matematică în România, încă din anul 1958, cînd acest domeniu abia apăruse și a activat, alături de aceștia, în cadrul Comisiei de lingvistică matematică a Academiei (condusă de Emil Petrovici; actualmente, această comisie a fost reorganizată sub conducerea prof. Alexandru Rosetti). Tot alături de prof. Rosetti, Moisil a pus, din 1962, bazele publicației „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, care de atunci duce în lume mesajul lingvisticii matematice românești. Sub conducerea sa au avut loc primele experimente de traducere automată în țara noastră (algoritmul fiind elaborat de E. Nistor pentru traducerea din engleză în română și experimentat pe calculatorul MECIPT al Universității din Timișoara).

Moisil nu a publicat multe lucrări de lingvistică matematică. Dar cele cîteva lucrări publicate sînt de o profundă originalitate, ele poartă „marca Moisil”. Este vorba mai întîi de ciclul consacrat problemelor puse de traducerea automată, ciclu care începe cu un articol asupra preliminariilor traducerii automate (în „Limba română”, 1960) și continuă cu un articol asupra conjugării verbelor (în „Studii și cercetări lingvistice”, vol.11, 1960, nr.1, pp.7—29), un altul asupra declinării (în „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol.1, 1962, pp.123—134) și un al treilea privind microsintaxa verbului (în „Cahiers de linguistique théorique et appliquée”, vol.2, 1965, pp.165—189). Nu există, în aceste articole, nici o formulă, nici o tehnică matematică, dar ele sînt impregnate de gîndire matematică, ele aduc, într-un domeniu atît de bătătorit, ca cel al gramaticii limbii române, cîteva idei proaspete, care realizează un spor de rigoare de care acest domeniu avea de multă vreme nevoie. Vom menționa astfel ingeniozitatea cu care este demonstrată importanța considerării mai mult ca perfectului drept criteriu principal în conjugarea mecanică a verbelor românești, metoda literelor variabile în descrierea analogului grafic al alternanțelor consonantice sau vocalice („Studii și cercetări lingvistice”, vol.11, 1960, nr.1, pp.7—24), analiza inedită a diatezei reflexive și a categoriei tranzitivității. O combinatorică deosebit de naturală, lipsită de orice prejudecată tributară gramaticilor

școlare, conduce la o taxinomie originală a verbelor, substantivelor și adjectivelor. Clasificările morfologice întreprinse de Moisil, metodologia sa au avut în vedere limba română scrisă, deoarece porneau de la exigențele de rigoare ale traducerii automate, traducere care se referă la ipostaza grafică a limbilor naturale. Dar, așa cum se întâmplă cu toate ideile fecunde, investigațiile lingvistice ale lui Moisil au depășit interesul lor inițial, devenind un permanent termen de referință în cercetările lingviștilor români și străini privind structura morfologică a limbii române (Minerva Bocșa, Constantinescu-Dobridor, Paula Diaconescu Jiri Felix, Valeria Guțu-Romalo, Maria Manoliu-Manea, E. Nistor, Ion Pătruț sînt doar o mică parte dintre cei care au utilizat clasificările lingvistice ale lui Moisil).

Deosebit de semnificativ pentru demersul lui Moisil este articolul său „Asupra conjuncției și” (Omagiu lui Alexandru Rosetti la 70 de ani”, Ed. Academiei, București, 1965, pp.587—591), unde se construiește o ierarhie de expresii construite cu ajutorul lui „și”, expresii de ordinul întâi fiind cele formate cu cuvinte aparținînd aceleiași părți de vorbire, iar expresiile de ordinul n fiind cele formate prin conjuncție a expresiilor de ordinul $n-1$. Moisil pune în evidență faptul că, cu ortografia limbii române scrise, putem forma expresii de ordinul al doilea, dar *nu* putem forma expresii de ordinul al treilea. De asemenea, Moisil arată că limba română scrisă nu dispune de mijloacele necesare pentru a distinge diferite tipuri de asocieri ale unor grupe de termeni, în cadrul unei construcții obținute prin conjuncție. În contrast cu această situație, scrierea formulelor logicii matematice și ale calculului algebric elementar este capabilă de aceste distincții, datorită utilizării parantezelor.

În 1971, Moisil prezintă, în cadrul cursurilor de vară și colocviilor științifice de la Sinaia, o conferință care consemnează cîteva din principiile de bază ale gîndirii lui Moisil („Cantitate și structură în lingvistica matematică”, Univ. din București, Sinaia, 25 iulie — 25 august 1971): Lingvistica matematică se prevalează în primul rînd de matematica structurală; imprecizia conceptelor lingvistice poate fi tratată cu ajutorul teoriei mulțimilor vagi a lui Zadeh și, în particular, a lui Gentilhomme.

Mediul optim al gîndirii moisiliene a fost acela al legăturilor interdisciplinare, mai întîi între discipline mate-

matice, apoi între matematică și alte discipline. Istoria științei românești va trebui să consemneze faptul că Moisiil a fost, în deceniile al șaselea și al șaptelea ale secolului nostru, unul dintre cei mai mari animatori pe care i-a cunoscut știința românească, o adevărată instituție de integrare culturală, polarizând cele mai variate preocupări de creație științifică și artistică. Iată doar câteva idei pentru care a militat:

a) Alături de metoda obișnuită de reducere a studiului mulțimilor infinite la cel al mulțimilor finite, deci de aproximare finită a infinitului, matematica actuală pune în evidență și aproximarea finitului cu ajutorul infinitului.

b) Matematica clasică a fost o matematică a numericului, a cantității. Odată cu începutul secolului nostru, pe măsură ce se dezvoltă topologia și algebra modernă, logica matematică, teoria categoriilor și alte ramuri „calitative” ale matematicii, matematica își deplasează atenția de la cantitate spre structură. Matematica contemporană este prin excelență una structurală, în opoziție cu cea anterioară, care era cantitativă.

c) Prin trecerea de la etapa numerică la cea structurală, matematica dobândește o aplicabilitate universală, care decurge din chiar dialectica ei internă și din „metabolismul” ei firesc cu celelalte discipline; nici un domeniu nu se mai poate sustrage razei de acțiune a matematicii.

d) Datorită celor observate la punctul precedent, caracterul din ce în ce mai aplicativ al matematicii nu numai că nu se opune tendințelor de abstractizare din ce în ce mai înaltă, dar este tocmai o consecință a acestor tendințe.

e) Dezvoltările aplicative fecunde sînt tocmai cele care decurg din dialectica internă a dezvoltării științei, nu cele care pleacă de la un deziderat exterior acestei dezvoltări.

f) Apariția și dezvoltarea calculatoarelor electronice implică modificări fundamentale atît în optica fiecărei științe în parte, cît și în întreaga organizare a vieții sociale. (Consecvent cu acest principiu și întrezărind mai devreme decît alții înnoirea pe care calculatoarele electronice aveau s-o determine în viața socială, Gr. C. Moisiil a creat Centrul de calcul al Universității din București și a pledat cu pasiune și convingere pentru o reorganizare corespunzătoare a cercetării și învățămîntului matematic românesc. În

1972 a lansat un amplu document programatic privind învățământul informaticii în universitate, document pe care avem datoria morală să-l studiem și să-l dezbatem, deoarece actualitatea problemelor pe care le atacă nu numai că nu a scăzut, dar continuă să crească).

g) Așa cum matematica clasică, predominant cantitativă, numerică, a fost urmată de matematica modernă, a structurilor (legiferată prin tratatul lui N. Bourbaki), aceasta din urmă este, la rândul ei, depășită de matematica „foarte modernă” născută din fenomenele consemnate la punctul f.

h) Preocupările interdisciplinare tind să se constituie ca partea cea mai interesantă și mai plină de perspective a activității de cercetare și creație.

i) Una dintre cele mai importante consecințe ale situației semnalate la punctul precedent o constituie faptul că întreaga cultură contemporană se încheagă într-o unitate organică, devenind imposibil să se mai despartă cultura umanistă de cultura tehnico-științifică. În particular, vechea opoziție a lui Pascal dintre spiritul geometric și spiritul de finețe devine perimată, matematica actuală devenind un instrument deosebit de adecvat pentru înregistrarea nuanțelor sub care se manifestă aspectele de finețe.

Deosebit de incomode pentru toți cei care cu greu pot ieși din deprinderi în care se află deja ancorați, aceste idei pot fi, desigur, puse în discuție. Dar, independent de aceasta, modul în care ele sînt elaborate în scrierile lui Gr. C. Moisil le conferă o înaltă valoare metodologică, filozofică și umană. Procedeele sale de argumentare obligă pe cititor la o reacție intelectuală care poate merge de la revelație pînă la construirea unor contraargumente de natură să stimuleze dezbaterile intelectuale.

*

În special în ultimii ani ai vieții sale, m-am apropiat de acest om al desfătării intelectuale, capabil să exercite un efect de vrajă asupra unor interlocutori dintre cei mai diferiți, printre care mă număram. L-am putut urmări în cele mai variate situații, i-am observat ritmul activității. Cu un entuziasm de adolescent, trecea de la un curs ținut la Facultatea de matematică, de medicină, de drept, de filozofie sau de limbă și literatură română la o lecție pentru

elevii nu știu cărei clase de matematică, pentru ca apoi să primească vizitele lungi ale unor tineri colaboratori, de-a lungul cărora improviza adevărate prelegeri științifice și morale, după care, cu o prospețime care-mi va rămîne totdeauna o taină, era gata să țină o conferință profundă și glumeață deopotrivă, care captiva publicul cel mai eterogen. Iar seara, tîrziu, la masa de lucru, preocupat de elaborarea propriilor sale lucrări ... Prin toate aceste ipostaze, Gr. C. Moisil trecea menținîndu-și o stare de spirit tonică, rămînînd tot timpul (chiar cînd se certa!) jovial și (chiar la mînie) senin. Trăindu-și epicureic fiecare clipă, fixînd cu o privire pătrunzătoare obiectul nevăzut al curiozității sale intelectuale, Gr. C. Moisil savura cînd murmurul interior al propriei sale gîndiri, cînd dialogul cu interlocutori care-i puneau la încercare tăria argumentelor. L-am observat de multe ori fredonînd în surdina o melodie de demult sau îngînînd interiorizat cursul propriilor sale impresii.

Într-unul din dialogurile sale imaginare, publicat în 1970 în „Contemporanul”, Gr. C. Moisil făcea una dintre observațiile cele mai caracteristice pentru mentalitatea sa profund refractară inerției și rutinei, lenei de gîndire și spiritului retrograd:

„Se știe că o idee începe prin a fi un paradox, continuă prin a fi o banalitate și sfîrșește prin a fi o prejudecată ...”

„Îmi place să urmăresc lunga poveste cînd o idee banală devine prejudecată. Cînd se înrăiește ca omul care îmbătrînește, care simte că-i fuge pămîntul de sub picioare, care trebuie să facă apel la autoritatea lui. Cînd tot farmecul tinereții lui s-a iaurțit în autoritate”.

Trecem peste stilul atît de specific moisilian al acestor rînduri, stil care și el va trebui să facă obiectul unui studiu atent (cred că și Arghezi l-ar fi invidiat pentru o creație lexicală atît de viguroasă ca verbul *a iaurți* într-un context care-i conferă o atît de stranie conotație), pentru a ne opri la tîlcul lor revelator, la densitatea lor intelectuală. Aflăm poate aici resortul atitudinilor sale față de știință, față de oameni, față de viață. Ceea ce face un mare poet cu cuvintele, nelăsîndu-le să ruginească, menținîndu-le mereu într-o stare sărbătorească, făcea Moisil cu ideile, imprimîndu-le o perpetuă mobilitate, care nu le lăsa nici un moment să alunece în banalitate sau în prejudecată. Tinerețea

sa învingătoare aceasta era : capacitatea de a fi mereu autentic, de a respinge orice autoritate, alta decît aceea a inteligenței.

Inepuizabil în energie și inteligență, uriaș în capacitatea de a-i molipsi pe alții de pasiunea căutării și de sensibilitate față de treburile obștești, savantul, profesorul și cetățeanul Grigore C. Moisil a strecurat în fiecare gest și în fiecare gînd al său o adîncă iubire față de oamenii acestui pămînt și acestui timp. Spectacolul de idei pe care l-a oferit culturii noastre rămîne ca un moment de permanentă referință.

Cum l-am putea uita ?

DE ACELAȘI AUTOR

1. *Linguistică matematică. Modele matematice în lingvistică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1963, 220p.
2. (în colaborare cu acad. M. Nicolescu și N. Dinculeanu) *Analiză matematică*, vol.1, Ed. Didactică și Pedagogică, 1965.
3. (în colaborare cu acad. M. Nicolescu și N. Dinculeanu) *Analiză matematică*, vol.2, Ed. Didactică și Pedagogică, 1965.
4. *Linguistică matematică*, ed. a II-a cu patru capitole noi, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1966, 254p.
5. *Gramatici și automate finite*, Ed. Academiei, București, 1964, 256p.
6. *Noțiuni de analiză matematică*, Ed. Științifică, București, 1966.
7. (în colaborare cu Ed. Nicolau și S. Stati) *Introducere în lingvistica matematică*, Ed. Științifică, București, 1966, 336p.
- 7'. (în colaborare cu Ed. Nicolau și S. Stati) *Introduzione alla linguistica matematica*, Casa editrice Riccardo Patron, Bologna, 1970.
8. *Algebraic Linguistics: Analytical Models*, Academic Press, New York-London, 1967, XIV + 254p.
9. *Introduction mathématique à la linguistique structurale*, Dunod, Paris, 1967, XII + 282p.
10. *Algebraické modely jazyka*, Academia, Praga, 1969.
11. *Teoretiko-mnozhestvennye modeli jazykov*, Nauka, Moscova, 1970.
12. *Poetica matematică*, Ed. Academiei, București, 1970, 400p.
- 12'. *Mathematische Poetik*, Ed. Academiei, București-Athenäum Verlag, Frankfurt am Main, 1973, 437p.
- 12''. *Matematika poetika*, Nolit-Beograd, 1974, 373p.
- 12'''. *Poetica matematica*, Casa editrice Riccardo Patron, Bologna, 1975.
13. (în colaborare) *Semiotica folclorului. Abordare lingvistico-matematică*, Ed. Academiei, București, 1975.

INDICE DE NUME

Ackermann, W. 18—20

Almansi 27

Andonie, G. St. 14

Andreani, S. 164

Appell, P. 117

Apollinaire, G. 187, 194

Aramă, O. 39

Archibald, R. C. 154

Arghezi, T. 165, 214

Aristotel 178

Arhimede 130

Arnheim, R. 148, 152

Bacovia, G. 41

Baire, R. 28, 35, 36, 53, 58, 59,
63, 66, 67, 69, 70, 93, 95, 97,
99, 101—105, 109

Balotă, N. 135

Bally, Ch. 131

Banach, S. 25, 73—75, 86, 87,
89, 116

Barbălat, I. 38

Barbilian, D. (= Barbu, I) 3,
7—9, 21, 120—132, 134—142,
175

Baudelaire, C. 165

Bouligand, G. 92

Benzécri, J. P. 131, 138

Bense, M. 152, 177, 178

Beotthy, E. 150

Bereanu, B. 40

Bernstein 25

Birkhoff, G. D. 152—154, 176,
177, 180

Bittner, R. 21

Blaga, L. 133, 166

Bledsoe, W. W. 57

Bloomfield, L. 187

Blumberg, H. 37, 92, 94, 97, 98,
104, 106, 108—110, 115

Boboc, N. 38

Bocşa, M. 212

Bogdan-Dulcă, G. 41

Bögel, K. 24, 27, 30

Borel, E. 35, 36, 47, 48, 114,
116, 161

Bouleau, C. 150

Bourbaki, N. 214

Braun, S. 87, 89

Brediceanu, M. 206

Brelot, M. 117

Broden, T. 44, 46

Bruckner, A. 52, 56, 67, 91

Bruteanu, C. 39

Brun, V. 116

Buchanan, S. 189

Bush, R. R. 13

Calude, C. 14—19, 43

Cantemir, D. 208

Caroll, L. 120

Cauchy, A. 12, 29, 192

Cazimir, B. 206

Călin, L. 121

Călinescu, G. 175, 208

Ceder, J. G. 91, 104

Chateaubriand 193

Cherry, C. 186

Chomsky, N. 141, 155, 187

Choquet, G. 36, 53—55, 59, 67

Ciacalov 113

Ciorănescu, N. 37—39

Clucu, G. 13

Climescu, A. 38

Coandă, H. 4

Coculescu, P. S. (vezi Servien, P.)

Collingwood, E. F. 35

Comarnescu, P. 143, 159

Comberousse, C. de 116

Constantinescu, G. 4

Constantinescu-Dobridor, Gh. 212

- Corduneanu, C. 40
 Costinescu, O. 39
 Courant, R. 19
- Darboux, G. 36, 50, 51, 53,
 66, 67, 76–82, 85–89, 91,
 111, 114, 118
 Denjoy, A. 10, 25, 35–37, 40,
 45, 46, 51, 53, 66, 72, 73,
 83, 84, 106, 108, 111, 117, 118,
 161
 Dedekind 138
 Descartes, R. 122
 Diaconescu, P. 212
 Dinculeanu, N. 23, 39
 Dirac, P. 161
 Dobrescu, E. 39
 Dodgson, L. (= Carroll, L.)
 Doinaş, Şt. A. 131
 Donner, J. T. 151
 Drimbă, C. 161
- Eco, U. 178
 Egorov, I. 35
 Eilenberg, S. 18, 21
 Einstein, A. 134, 135
 Elgot, C. C. 18, 21
 Emerson, R. W. 130
 Eminescu, M. 167
 Emmanuel, D. 33
 Erdős, P. 86
 Euler, L. 116
- Fan, Ky 116
 Felix, J. 212
 Fibonacci 145–150, 153, 154,
 156, 159
 Filipczak, F. M. 104
 Foiaş, C. 11, 12, 23, 38, 39
 Fréchet, M. 103, 105, 116
 Freudenthal, H. 170
 Friedman, A. 12
 Frink, O. 25, 29
 Proda, Alex. 3, 7–10, 37, 63–65,
 106–117, 120
 Prunzetti, I. 159
- Gal, L. S. 107
 Galois, E. 123, 126–128, 139, 196
 Gardner, M. 160
 Garg, K. M. 59–63, 87–90
- Garnier, P. 178
 Garvin, P. 201
 Gauss, K. F. 134, 137–141
 Gentilhomme, Y. 212
 Georgescu-Roegen, N. 22
 Ghica, G. 143
 Ghyka, M. 144
 Ghyka, M. C. 3, 7, 8, 11, 21,
 143–145, 147–156, 159, 160,
 176
 Ghyka, R. 144
 Gödel, K. 18, 185
 Goffman, C. 94
 Golopenţia-Eretescu, S. 169, 185
 Goursat, E. 46
 Grigorescu-Bacovia, A. 41
 Grupul Tel Quel 178
 Grupul μ 172
 Guiaşu, S. 14
 Gunzenhäuser, R. 177
 Guţu-Romalo, V. 212
- Hadamard, J. 23, 161
 Halanay, A. 128
 Hambidge, J. 154
 Hamel, G. 117
 Haret, S. 3, 11, 21, 32, 41, 137
 Harris, T. E. 13
 Hartogs 28
 Hasden, B. P. 208
 Hausdorff, F. 202, 203
 Hawkins, T. 35
 Hegel 178
 Hermant, A. 150
 Hermite, C. 192
 Herz, H. 117
 Hilbert, D. 15–19, 141, 142, 187
 Hille, E. 12
 Hincin, A. I. 118
 Hjelmslev, L. 178
 Hobson, E. W. 46, 60, 63
 Homer 141
 Hurwitz, A. 145
 Huyghe, R. 149–154
- Iorga, N. 208
 Iosifescu, M. 13, 14, 76, 77,
 79–86
- Jacob, F. 152, 155, 159
 Jakobson, R. 170, 173, 185

Jarceva, V. N. 169
Jensen 40
Johansen 178

Kaneff, S. 156
Kaufmann, A. 210
Kempisty, S. 57, 99
Kennedy, M. 13
Kepler 146
Khayyam, O. 120
Kleene, S. C. 18
Knaster, B. 48
Kolmogorov, A. N. 108, 168
Köpcke, A. 44–46, 50, 51, 59–
63, 65, 82
Kryzański, M. 12
Kuratowski, C. 43, 48, 49, 59,
95–97

Laczkovich, M. 65
Ladyženskaja, O. 12
Lalescu, T. 115
Lambek, J. 142
Landau, E. 19
Landis, E. M. 55
Laplace, P. 21
Larssen 140
Lavignac, A. 190
Lavrentiev, M. 64, 65, 112
Lebesgue, H. 21, 25, 27, 28,
35–37, 46, 47, 51, 52, 54, 66,
69, 70, 72–74, 79, 80, 87, 89,
92, 94, 102, 103
Le Corbusier 191
Leibniz, G. W. 118, 122, 170
Leonard, J. L. 67
Leonardo da Vinci 146, 147
Lindenmayer, A. 159, 206
Lie, S. 124
Liouville 12
Lipinski, J. S. 52, 55, 56, 59,
66–67
Lohwater, A. J. 36
Luce, D. 11
Lupașcu, S. 22
Luzin, N. 35, 37, 47, 70–72, 74,
75, 86–88, 90, 92, 101, 102,
104–106, 110

Malita, M. 3, 11
Mallarmé, S. 133, 194

Manollu, M. 212
Marchaud, A. 78
Marcus, S. 3, 4, 39, 142, 156,
159, 169
Marczewski, E. 43
Markov, A. A. 13, 113
Maser, S. 152, 177
Mašek, V. E. 153
Maximov, I. 53, 67, 104
Mazurkiewicz, S. 46
Mihăileanu, N. 124
Mihoc, G. 13, 38
Minakshisundaram, S. 73, 75,
76, 86
Mišik, L. 66
Moisil, Gr. C. 3, 7, 8, 14, 21,
173, 208–216
Moldovan, E. 39
Moles, A. 152, 177
Mondrian, P. 150
Monod, J. 153, 155, 159
Montel, P. 23, 146, 161
Morse, A. P. 57
Mosca, G. 39
Mosteller, F. 13
Mounin, G. 170

Nash 11
Nasta, M. 207
Neugebauer, C. J. 98
Newton, I. 118, 122
Nicolau, E. 142
Nicolescu, B. 131, 133, 134
Nicolescu, L. J. 39
Nicolescu, M. 4, 5, 10–12, 21–33,
37–39, 42–49, 67, 83, 209–
211
Nistor, E. 211, 212
Noica, C. 22
Novotný, M. 203

Ogden, C. K. 186
Olivieri, U. 63
Onicescu, O. 13, 14, 22, 38, 148,
188

Pacioli di Borgo, F. L. 146
Painlevé, P. 117
Palade, Gh. 4
Pascal, B. 214
Pătruț, I. 212

- Peirce, C. S. 153, 186
 Pereno, J. 44, 46
 Perron, O. 52
 Péter, R. 15, 17, 18, 20
 Petrovici, R. 211
 Petruška, G. 65
 Pfaff 140
 Piccard, S. 113
 Picone, M. 23
 Pierpont, J. 46
 Pitagora 192
 Platon 147
 Pleșu, A. 159
 Poincaré, H. 130, 141, 170, 192
 Pompeiu, D. 3, 7–10, 32, 33,
 35, 36, 39, 41–60, 62–68, 82,
 111, 112, 115, 208
 Popa-Burcă, L. 204, 205
 Popoviciu, T. 37–39
 Preiss, D. 55
 Prévert, J. 165, 166
 Prohorov, Yu. Y. 106, 107

 Radu, M. 164
 Raiffa, H. 11
 Raischi, V. 196, 197
 Rapoport, A. 169
 Rădulescu, M. 39
 Reichardt, J. 153
 Revzin, I. 170, 199, 200–204
 Richards, I. A. 186
 Ridder, J. 25
 Riemann, B. 25, 38, 49–51, 192
 Rilke, R. M. 172
 Rimbaud, A. 127
 Ripianu, D. 39
 Roman, T. 159
 Rosenfeld, A. 156
 Rosetti, A. 121, 141, 211
 Roșculeț, M. 39
 Rozencveig, V. I. 170
 Rubens 191
 Rustaveli, S. 160

 Saks, S. 73, 74, 76, 83, 84, 86,
 94, 95
 Savory, T. 169
 Săhleanu, V. 22
 Sălăgean, A. 39
 Sălăgean, I. 39
 Schoenflies, 46

 Schrödinger, R. 207
 Servien, P. 3, 7–9, 21, 144,
 153, 154, 161–168, 170–181,
 185, 189–194, 201–204, 206,
 207
 Șfirlea, L. 207
 Shakespeare, W. 33
 Shaw, A. C. 153
 Sierpiński, W. 35–36, 68, 70–71,
 94, 95, 98, 103, 108
 Singer, I. 39
 Sørensen 178
 Stamatescu, I. 159
 Stancu, D. D. 39
 Stati, S. 142
 Steinhaus, H. 43, 113
 Stoilow, S. 3, 7–10, 12, 32, 36,
 39, 71–87, 90, 91, 115, 168,
 169, 209
 Sudan, G. 3, 14–21, 37
 Suslin 87–88, 105

 Taylor 25, 27
 Tesnière, L. 191
 Theodorescu, R. 13
 Thielman, H. P. 57
 Thom, R. 152–154
 Thompson, D'Arcy 149, 150,
 152–154
 Tihonov, A. 12
 Todorov, T. 178
 Tolstov, G. P. 118
 Traversetti, B. 164
 Turing, A. M. 18
 Tzodyks, V. M. 55

 Tevy, I. 14, 15, 17, 39, 93–99,
 101, 102, 104
 Țițeica, G. 33, 136

 Valda, D. 39
 Valéry, P. 146, 161, 172, 178
 Vallé Poussin, Ch. de la 26
 Vășilescu, F. 3, 7–10, 36, 37,
 92–94, 96–99, 101–105, 115
 Verdenko, A. 108
 Vitruvius 146

Volterra, V. 49
Vrănceanu, G. 123, 209

Weierstrass, K. 24, 103, 192
Weyl, H. 19, 152, 154, 177
Wiener, R. 146

Xenakis, I. 191

Yim-Ming, Wang 106
Yngve, V. 191
Young, G. C. 37, 83, 84, 106, 115

Zadeh, L. 210, 212
Zahorski, Z. 49, 54—56, 66
Zalcwasser, Z. 46
Zipf, G. 191
Zoretti, L. 117

CUPRINS

PREFAȚĂ (DE ACAD. MIRON NICOLESCU)	3
DIN ISTORIA UNOR FRUSTRĂRI	7
«Până la proba contrarie, pentru mine orice om este bun și îi acord încredere» (Miron Nico- lescu)	22
STADIILE DE DEZVOLTARE A TEORIEI FUNCȚIILOR REALE ÎN ROMÂNIA	35
DIMITRIE POMPEIU	41
SIMION STOILOW	69
FLORIN VASILESCU	92
ALEXANDRU FRODA	106
DAN BARBILIAN	120
MATILA C. GHYKA	148
PIUS ȘERBAN COCULESCU (PIUS SERVIEN)	161
GRIGORE C. MOISIL	208
DE ACELAȘI AUTOR	217
INDICE DE NUME	219

COLI DE TIPAR: 14, — TIRAJUL: 1700 EX.
BUN DE TIPAR: 3. XI. 1975.

INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ CLUJ
MUNICIPIUL CLUJ-NAPOCA STR. BRASSAI NR. 5—7
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA
COMANDA NR. 366/1975





EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

Este o obligație față de opera științifică a predecesorilor de a o reconsidera în mod periodic și de a o reciti cu înțelegerea pe care ne-o dă cea mai recentă dezvoltare a științei. Vom constata atunci că operele științifice autentice se află într-o continuă devenire; ele nu sînt obiecte, ci procese a căror evoluție depășește intențiile inițiale ale autorului. În această perspectivă sînt analizate, în cartea de față, unele idei și rezultate datorate lui M. Nicolescu, D. Pompeiu, S. Stoilow, Fl. Vasilescu, Alex. Froda, D. Barbilian, P. Servien, M. Ghyka, Gr. C. Moisil ș.a. Selecția a fost determinată, într-o mare măsură, de elemente care țin de biografia științifică a autorului acestei cărți. Cartea este, în primul rînd, un mănunchi de mărturisiri ale unor experiențe care l-au adus pe autor în contact cu cîteva opere și personalități remarcabile ale culturii românești.

Lei 8,50